

Máximos e Mínimos

Nesse capítulo, vamos estudar valores máximos e/ou mínimos de uma função, isto é, os maiores/menores valores de $f(x)$.

Definição: Seja f uma função. Tome $x_0 \in D(f)$.

Dizemos que

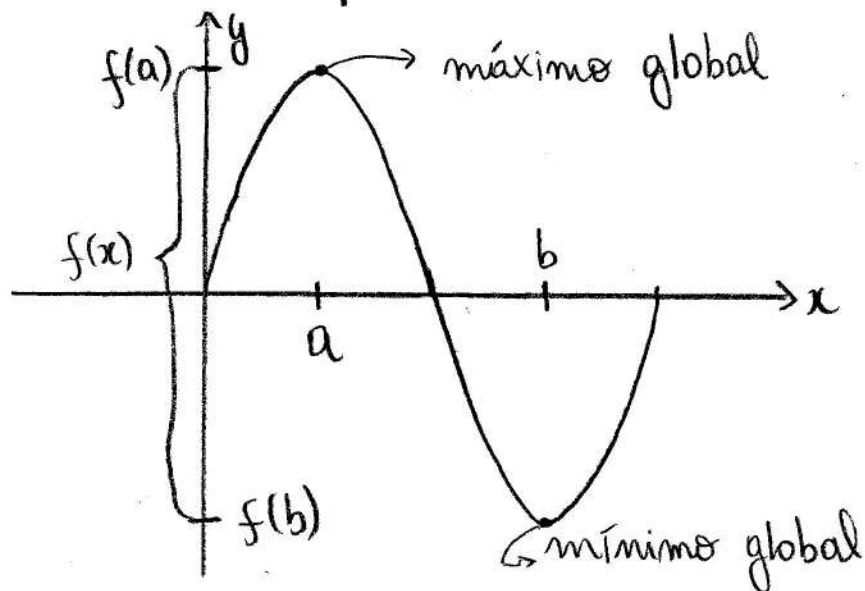
1) x_0 é um ponto de máximo global (ou absoluto) se

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in D(f)$$

2) x_0 é um ponto de mínimo global (ou absoluto) se

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

Nessas condições, dizemos que $f(x_0)$ é valor máximo/
mínimo de f .



Um ponto de máximo/mínimo é chamado de ponto extremo de f .

Exemplos:

1) Considere $f(x) = x^2$.

Veja que

$$f(0) = 0^2 = 0 \leq x^2 = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $x=0$ é um ponto de mínimo global de f .

2) Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$.

Vamos analisar a forma canônica de f :

$$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0,$$

onde (x_0, y_0) é o vértice.

Temos $(x - x_0)^2 \geq 0$. Daí,

• Se $a < 0$, então

$$f(x_0) = y_0 \underset{-}{\geq} \underset{+}{a} \cdot \underset{+}{(x - x_0)^2} + y_0 = f(x) \Rightarrow x_0 \text{ é máximo global.}$$

• Se $a > 0$, então

$$f(x_0) = y_0 \underset{+}{\leq} \underset{+}{a} \cdot \underset{+}{(x - x_0)^2} + y_0 = f(x) \Rightarrow x_0 \text{ é mínimo global.}$$

3) Seja $f(x) = |x|$. Veja que

$$f(0) = |0| = 0 \leq |x| = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $x=0$ é ponto de mínimo global.

4) Considere as funções seno e cosseno.

Os valores extremos dessas funções são:

- $y=1$ como valor máximo e
- $y=-1$ como valor mínimo.

Já vimos que:

$$\bullet \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é par} \\ -1, & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \cos(k\pi) = (-1)^k = \begin{matrix} \nearrow \end{matrix}$$

Portanto,

$\rightarrow y = \sin x$ atinge valor

$$\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases} \quad \text{em } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ para } \begin{matrix} k \text{ par} \\ k \text{ ímpar} \end{matrix}$$

$\rightarrow y = \cos x$ atinge valor

$$\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases} \quad \text{em } x = k\pi, \text{ para } \begin{matrix} k \text{ par} \\ k \text{ ímpar} \end{matrix}$$

5) $f(x) = x$ não possui extremos globais.

Se x_0 fosse extremo global, teríamos

$$\bullet \quad x = f(x) \leq f(x_0) = x_0 \Rightarrow x \leq x_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad x = f(x) \geq f(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0 \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em ambos os casos temos um absurdo, uma vez que $x_0 + 1 > x_0$ e $x_0 - 1 < x_0$.

6) Considere $f(x) = \sqrt{x}$.

Temos que

$$f(0) = \sqrt{0} = 0 \leq \sqrt{x} = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Logo, $x=0$ é um ponto de mínimo global de f .

Se x_0 fosse máximo global, teríamos $\sqrt{x} \leq \sqrt{x_0}$, o que não é verdade pois $\sqrt{x_0} < \sqrt{x_0+1}$. Logo, f não possui máximo global.

7) Considere $f(x) = \frac{1}{x}$.

Para $a < b$ temos

$$f(a) = \frac{1}{a} > \frac{1}{b} = f(b)$$

→ x_0 não pode ser mínimo, pois basta tomar $x_0 < c$ e temos

$$f(x_0) > f(c).$$

→ x_0 não pode ser máximo, pois se tomarmos $c < x_0$ teremos

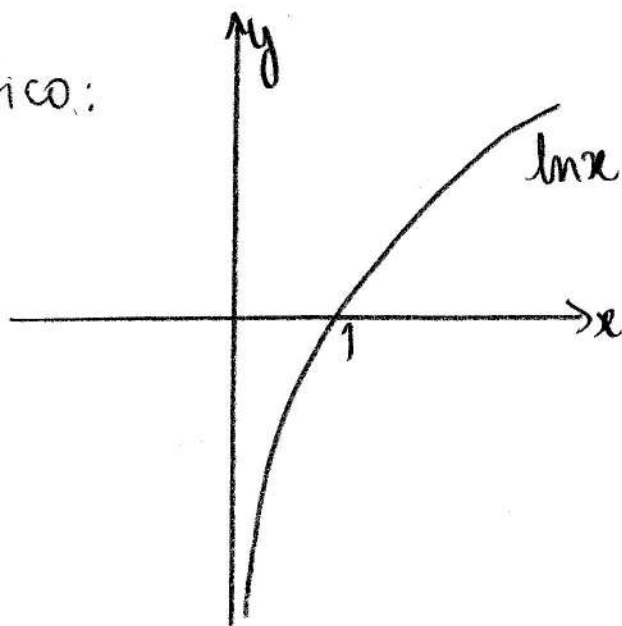
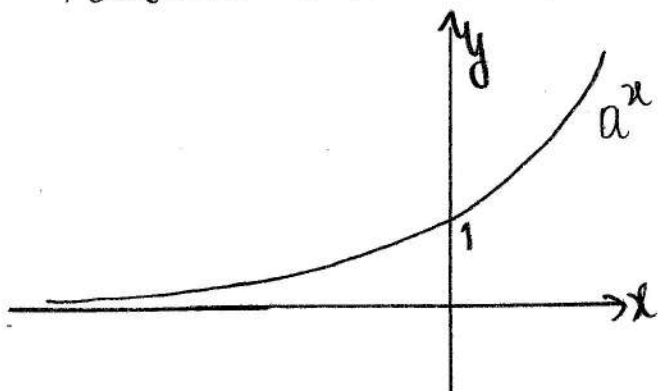
$$f(c) > f(x_0).$$

8) Seja $f(x) = a^x$.

Aqui f não possui máximo e mínimo globais

9) $f(x) = \ln x$ também não possui máximo nem mínimos globais.

Podemos observar isso no gráfico:



O mesmo vale para
 $0 < a < 1$.

Se restringirmos o domínio, f pode ter um máximo/mínimo numa região particular do domínio.

Definição 2: Seja f uma função e $x_0 \in D(f)$.

1) x_0 é dito ser um ponto de mínimo local (ou relativo) se existir um intervalo aberto I contendo x_0 de modo que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in I \cap D(f).$$

2) x_0 é dito ser um ponto de máximo local (ou relativo) se existir um intervalo aberto I contendo x_0 tal que

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in I \cap D(f).$$

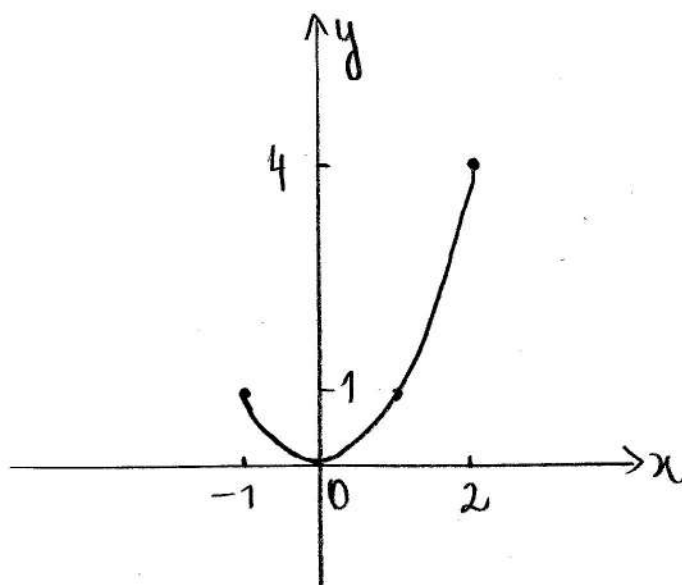
Obs.: A região do domínio que me referi no início da página é $I \cap D(f)$. Dessa forma, um máximo/mínimo local é o maior/menor valor de f em $I \cap D(f)$.

Vejam os alguns exemplos:

1) Considere f definida por

$$f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

O gráfico é



Veja que

- $x=2$ é um ponto de máximo global e
- $x=0$ é um ponto de mínimo global

E quanto a $x=-1$?

Certamente $x=-1$ não é extremo global.

Considere $I = (-2, 0)$, por exemplo.

Tome $x \in I \cap D(f) = [-1, 0)$. Daí,

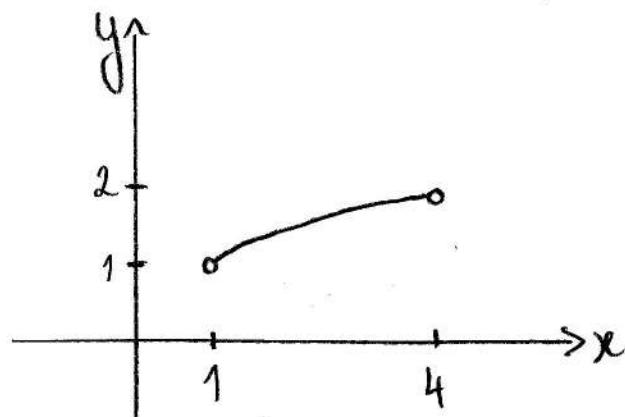
$$f(x) \leq 1 = f(-1)$$

Logo, $x=-1$ é um máximo local de f .

2) Considere

$$f: (1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

O gráfico de f é



As bolas abertas significam que

$$1 < f(x) < 2, \quad \forall \quad 1 < x < 4.$$

Isso significa que $f(x)$ não atinge 1 e 2.

Os valores $x=1$ e $x=4$ não podem ser extremos pois não estão no domínio.

Considere $x=c \in (1, 4)$ e tome $I = (a, b)$ um intervalo aberto qualquer em $D(f)$. Temos

$$\sqrt{a} < \sqrt{c} < \sqrt{b} \Rightarrow f(a) < f(c) < f(b).$$

Isso implica que $x=c$ não pode ser máximo nem mínimo local. Como $x=c$ é qualquer, concluímos que f não possui mínimos/máximos locais.

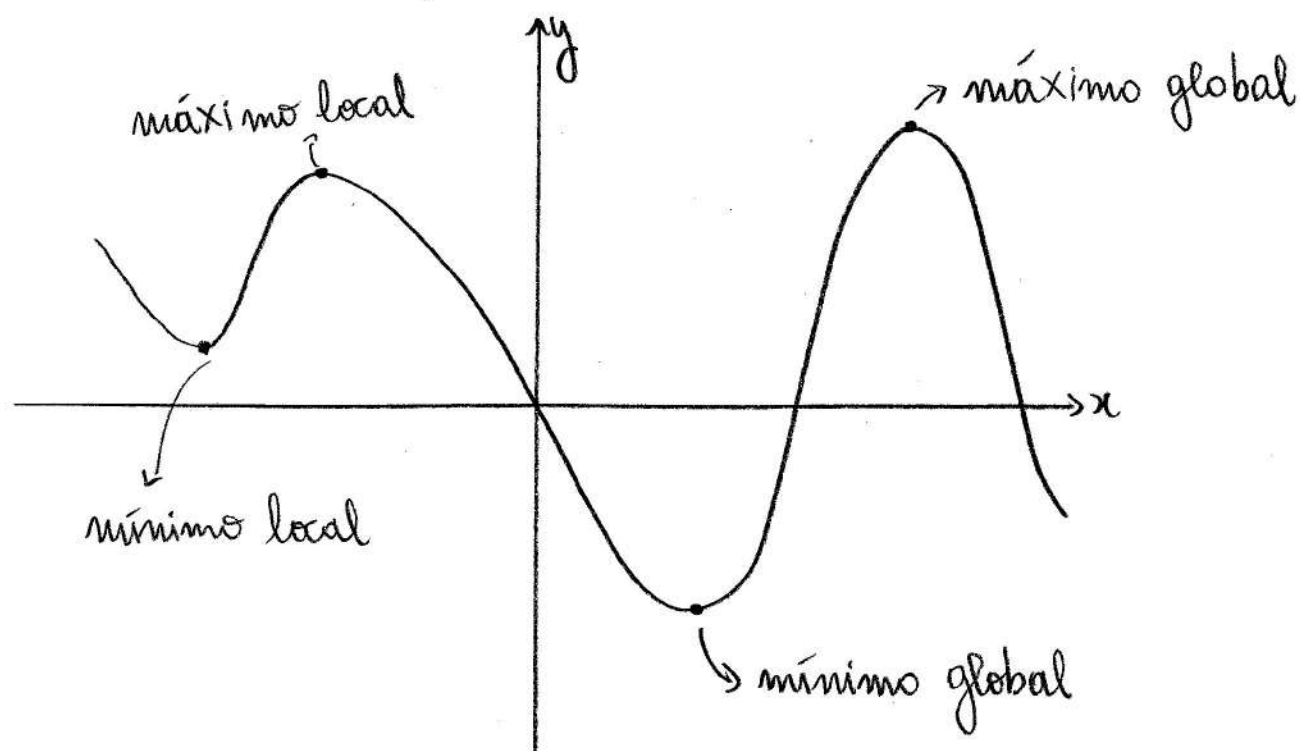
Obs.: Todo extremo global também é um extremo local, pois mesmo restringindo a um intervalo aberto, continuamos tendo o maior/menor valor de $f(x)$. Em suma:

x_0 é extremo global $\Rightarrow x_0$ é extremo local //

A contrapositiva garante que:

x_0 não é extremo local $\Rightarrow x_0$ não é extremo global //

Vamos fazer um esboço dos tipos de extremos:



Agora, vamos envolver a derivada na história:

Teorema 1 (Teorema de Fermat)

Se f é uma função derivável em (a,b) e $x_0 \in (a,b)$ é um extremo local, então

$$f'(x_0) = 0.$$

Prova:

Suponha que x_0 é um ponto de mínimo local de f , isto é, existe um intervalo aberto I tal que

$$\begin{aligned} f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I \cap D(f) &\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ se } x > x_0 \quad (1) \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ se } x < x_0 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Como f é derivável em x_0 , temos

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Como o limite conserva o sinal, temos

$$\bullet \text{ Se } x > x_0 : f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ por (1)}$$

$$\bullet \text{ Se } x < x_0 : f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ por (2)}$$

Essas duas desigualdades implicam que $f'(x_0) = 0$.

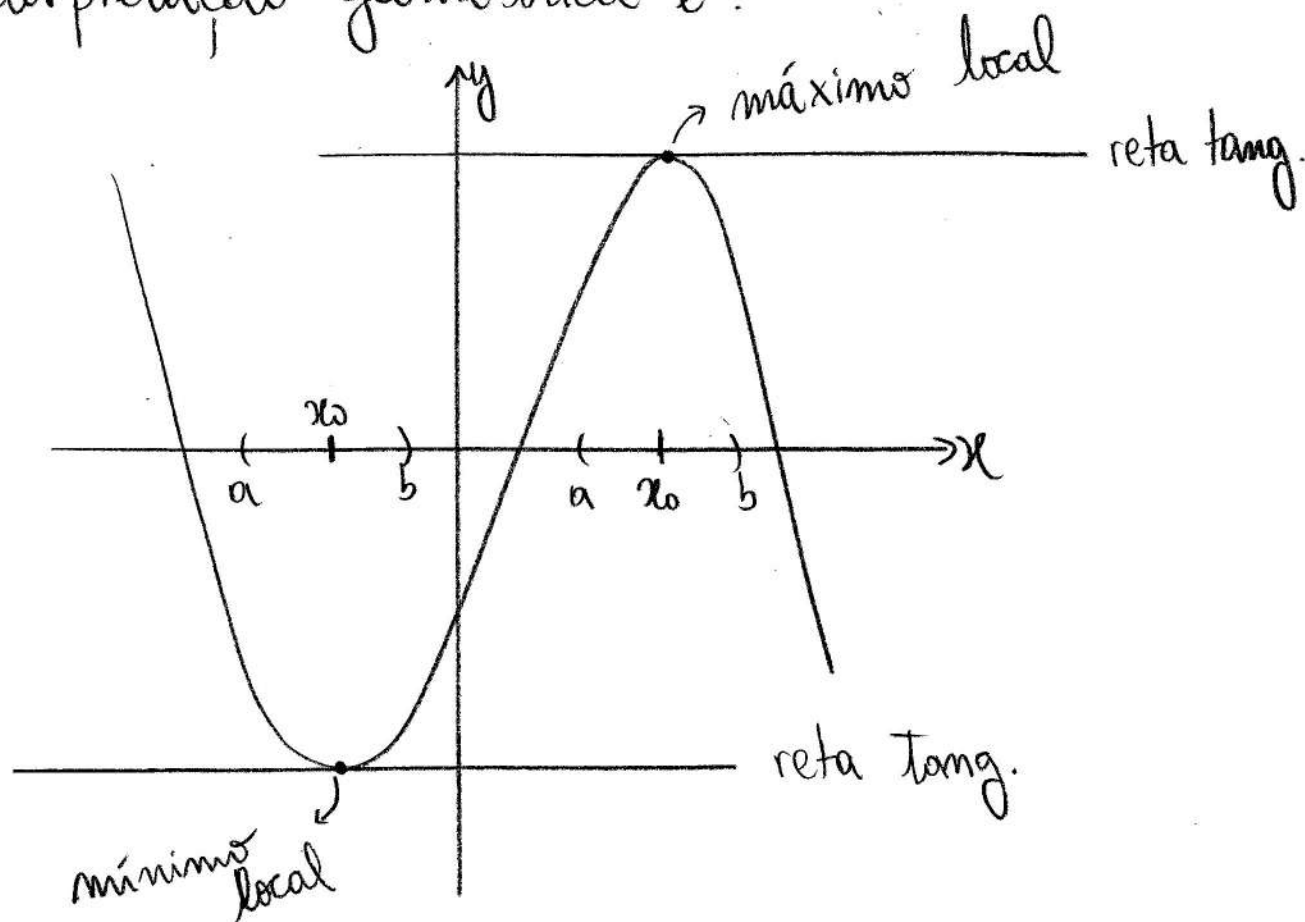
Obs.: A prova para o máximo local é análoga e fica como exercício.

Se $x_0 \in (a, b)$ é extremo local, então o teorema de Fermat garante que $f'(x_0) = 0$. Daí, a reta tangente é:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 0 \cdot (x - x_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_0 = f(x_0)} \text{ (reta paralela ao eixo-} x \text{)}$$

A interpretação geométrica é:



Definição 3: Seja f uma função derivável e $x_0 \in D(f)$. Se $f'(x_0) = 0$ ou f' não existe em x_0 , dizemos que x_0 é um ponto crítico de f .

O Teorema de Fermat pode ser reescrito como

"Se $x_0 \in (a, b)$ é extremo local, então x_0 é ponto crítico"

Vejamos alguns exemplos:

1) Considere $f(x) = \cos x$.

Vamos achar os pontos críticos de f .

Primeiro, vamos resolver:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\cos x)' = 0 \Rightarrow -\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$\Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $f'(x) = -\sin x$ está definida em $\mathbb{R}$, concluímos que os pontos críticos de f são da forma $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2) Considere $f(x) = a^x$. Temos que $f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Se $f'(x) = 0$, então

$$\ln a \cdot a^x = 0 \Rightarrow a^x = 0.$$

Como essa equação não possui solução (pois $a^x > 0$) e $f'(x) = \ln a \cdot a^x$ está definida em $\mathbb{R}$, temos que f não possui pontos críticos.

3) Seja $f(x) = \ln x$.

Temos que $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Veja que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0,$$

mas essa equação não possui solução.

Como $f'(x) = \frac{1}{x}$ está definida em $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, temos que f não possui pontos críticos.

4) Considere $f(x) = x^3 - 2x$.

Temos que $f'(x) = 3x^2 - 2$.

Se $f'(x) = 0$, então

$$3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Como f' está definida em $\mathbb{R}$, temos que os pontos críticos de f são $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5) Seja $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Veja que $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Que implica $D(f') = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Daí, f' não está definida em $x = \pm 1$.

Se $f'(x) = 0$, então

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Porém, $x = 0$ não está no domínio de f .

Logo, os pontos críticos de f são $x = \pm 1$.

6) Considere $f(x) = x^2 - \ln x$.

Temos que $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Veja que $f'(x) = (x^2)' - (\ln x)' = 2x - \frac{1}{x}$. Daí,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, segue que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o único ponto crítico de f .

7) Considere $f(x) = |x|$.

Temos que $f'(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Daí, $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

Como f' não está definida em $x = 0$, temos que $x = 0$ é o único ponto crítico de f .

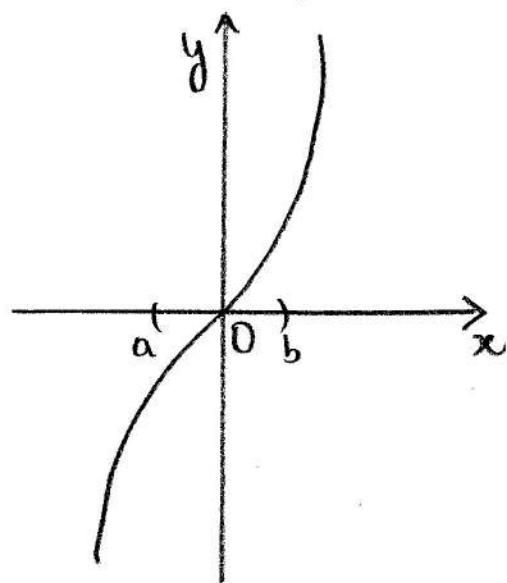
8) Seja $f(x) = x^3$.

Temos que $f'(x) = 3x^2$. Se $f'(x) = 0$, então

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Logo, $x = 0$ é ponto crítico de f .

O esboço do gráfico é:



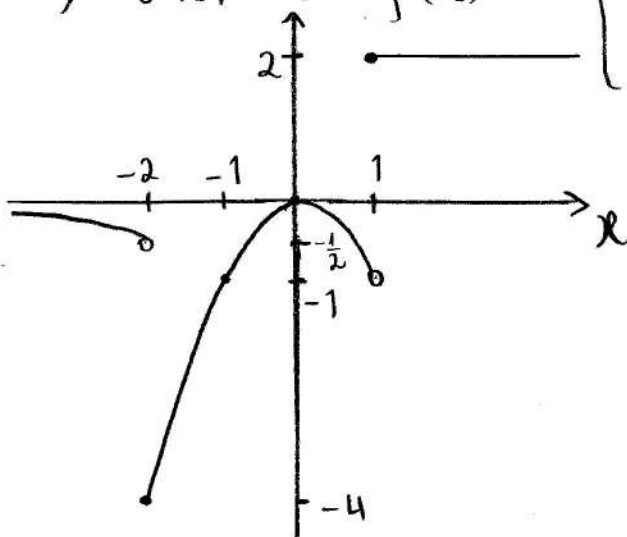
Tomemos $0 \in (a, b)$, isto é, temos $a < 0 < b$. Daí,

$$f(a) = a^3 < 0 < b^3 = f(b)$$

Isso implica que $x = 0$ não pode ser extremo local de f .

Esse é um exemplo de que não vale a volta do Teorema de Fermat. Aqui temos que x_0 é ponto crítico de f , mas não é extremo local.

9) Considere $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 2, & \text{se } x \geq 1 \\ 1/x, & \text{se } x < -2 \end{cases} \quad (D(f) = \mathbb{R}).$



Temos que

- Todo $x \geq 1$ é máximo global
- $x = -2$ é mínimo global

• $x = 0$ é máximo local (tomemos $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$)

Como f é descontínua em $x = -2$ e $x = 1$, temos que f não está definida aí.

Daí, $x = -2$ e 1 são pontos críticos de f .

Agora, vamos estudar uma série de resultados que permitirão classificar extremos locais com base na derivada.

Teorema 2 (Teorema de Weierstrass)

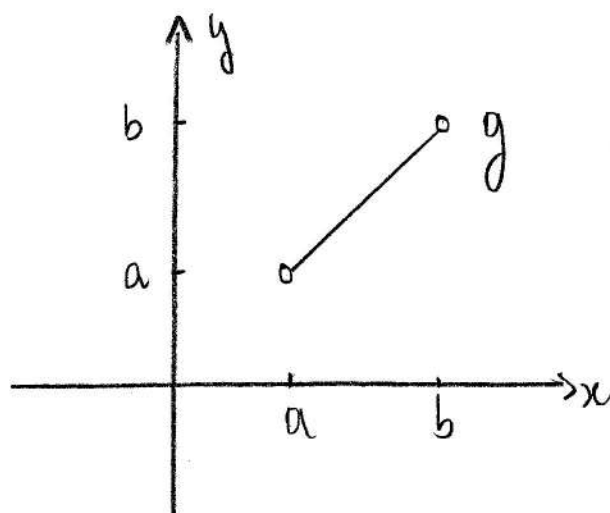
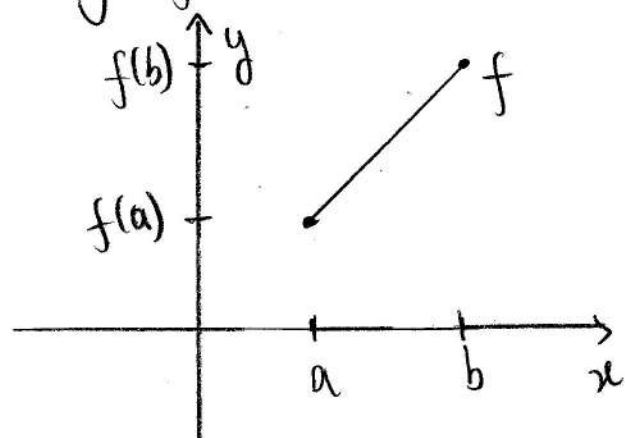
Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existem x_m e x_M em $[a, b]$ tal que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \quad \forall x \in [a, b]$$

Exemplos:

1) Considere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$ $x \mapsto x$

Cujos gráficos são



O Teorema de Weierstrass garante que f possui máximo e mínimo globais: $f(b) = b$ e $f(a) = a$.

Não podemos usar o mesmo teorema em g , uma vez que ela está definida em um intervalo aberto. Porém, sabemos que g não possui extremos.

2) Não quer dizer que uma função definida em um aberto não possui extremos:

$$\text{Seja } f: \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin x$$

Nesse intervalo temos:

$$\bullet \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \bullet \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1,$$

ou seja, $x = \frac{\pi}{2}$ é máximo global e $x = \frac{3\pi}{2}$ é mínimo global. Se mudássemos:

$$g: \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin x$$

teríamos que g não tem extremos locais em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, uma vez que g não está definida em $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, onde o seno é 1 e -1, respectivamente.

3) Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{se } x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Veja que $D(f) = [-1, 1]$.

Temos que f é contínua em $[-1, 1]$.

Daí, pelo Teorema de Weierstrass, temos que f possui extremos globais em $[-1, 1]$.

Precisamos de mais ferramentas para achar esses extremos. 219

Teorema 3 (Teorema de Rolle)

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$. Nessas condições, existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$f'(x_0) = 0.$$

Prova: Essas condições satisfazem o Teorema de Weierstrass.

Daí, existem x_m e x_M em $[a, b]$ tais que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \quad \forall x \in [a, b].$$

• Se $x_m = a$ e $x_M = b$, então

$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(b) = f(a)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) \Rightarrow f(x) \text{ é constante}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

• Se x_m ou x_M não for extremidade de $[a, b]$, então $x_m \in (a, b)$ ou $x_M \in (a, b)$. Como x_m e x_M são pontos extremos, pelo Teorema de Fermat segue que

$$f'(x_m) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(x_M) = 0. \quad \#$$

Obs.: Nas condições desse teorema, temos todos $x \in (a, b)$ sendo pontos críticos (função constante) ou pelo menos um dos extremos é ponto crítico.

Teorema 4 (Teorema do Valor Médio - TVM)

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) .

Existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prova: Vamos usar uma função auxiliar

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = x(f(b) - f(a)) - f(x) \cdot (b - a)$$

Como f é contínua e $y = kx$ também, temos que g é contínua. Como f é derivável, temos que g é derivável em (a, b) . Vamos provar que $g(a) = g(b)$:

$$\begin{aligned} \bullet g(a) &= a \cdot (f(b) - f(a)) - f(a) \cdot (b - a) \\ &= a f(b) - a f(a) - b f(a) + a f(a) = a f(b) - b f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet g(b) &= b(f(b) - f(a)) - f(b)(b - a) \\ &= b f(b) - b f(a) - b f(b) + a f(b) = a f(b) - b f(a) \end{aligned} \quad \parallel$$

Dessa forma, g está nas condições do Teorema de Rolle.

Daí, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $g'(x_0) = 0$. Logo,

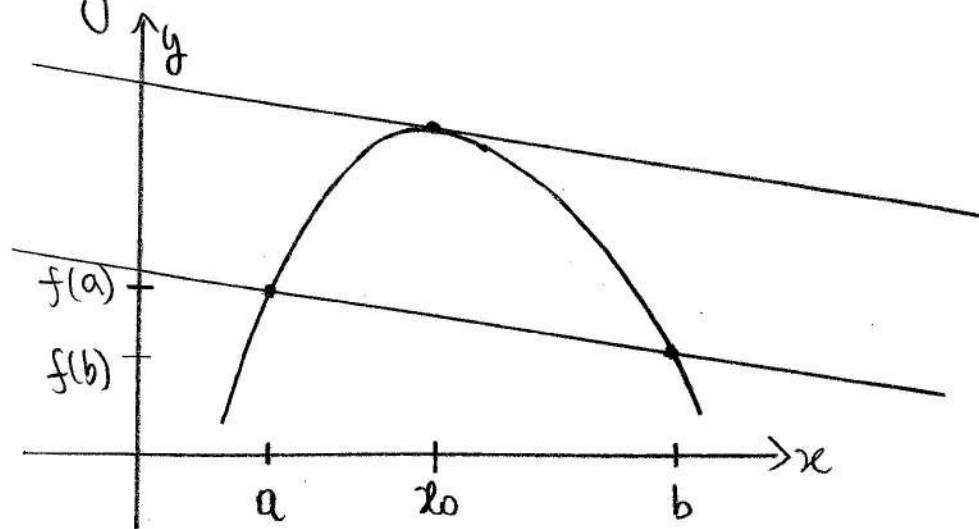
$$g'(x_0) = f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \neq$$

A interpretação geométrica é que a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ tem o mesmo coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, cujo coeficiente angular é

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

Isso significa que essas retas são paralelas.

Veja o seguinte desenho:



Exemplos:

1) Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Se $f'(x) = 0$ em (a, b) , então f é constante

De fato, considere $x_1 < x_2$ em $[a, b]$. Pelo TVM, existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que

$$0 = f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Como x_1 e x_2 são arbitrários, segue que f é constante

2) Considere $f(x) = 6x^2 - x^3$ definida em $[0, 2]$.

Vamos determinar $x_0 \in (0, 2)$ tal que a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta que passa por $(0, f(0))$ e $(2, f(2))$.

Veja que $x_0 \in (0, 2)$ existe pois f está nas condições do TVM. Temos que

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 \cdot 2^2 - 2^3 - (6 \cdot 0^2 - 0^3)}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\Rightarrow 12x_0 - 3x_0^2 = 8 \Rightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$= 2 \pm 2\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Como $2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 2$, temos que o x_0 procurado é $2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

4) Vamos mostrar que

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Considere $a < b$.

Estamos considerando $f(x) = \sin x$ em $[a, b]$.

Veja que f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) .

Dai, pelo TVM, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como $f'(x_0) = \cos x_0$, segue que

$$\cos x_0 = \frac{\sin b - \sin a}{b - a}$$

$$\Rightarrow \sin b - \sin a = (\cos x_0)(b - a)$$

$$\Rightarrow |\sin b - \sin a| = |\cos x_0| |b - a|$$

Como $|\cos x_0| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |\sin b - \sin a| &= |\cos x_0| |b - a| \\ &\leq 1 \cdot |b - a| = |b - a|. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\sin b - \sin a| \leq |b - a|}$$

Crescimento e Decrescimento

Crescimento e/ou decrescimento é uma propriedade de funções monótonas. Relembre essa definição:

- Função monótona Crescente:

Para $x_1, x_2 \in I \subseteq D(f)$ vale que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Função monótona Decrescente:

Para $x_1, x_2 \in I \subseteq D(f)$ vale que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

A seguir, apresento uma ferramenta para obter regiões de crescimento / decrescimento.

Teorema 5 (Teste C/D)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b)

1) Se $f'(x) > 0$ para $x \in (a, b)$, então f é crescente em (a, b)

2) Se $f'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, então f é decrescente em (a, b)

Prova:

Vamos provar o item 1.

Sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$ tais que $x_1 < x_2$.

Como f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2) , pelo TVM segue que existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ de forma que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0) (x_2 - x_1)$$

Temos que $x_2 - x_1 > 0$. Como $f'(x) > 0$, vale que $f'(x_0) > 0$. Daí,

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Logo, f é crescente em (a, b)

A única diferença para provar 2) é que temos $f'(x_0) < 0$. Isso implica que

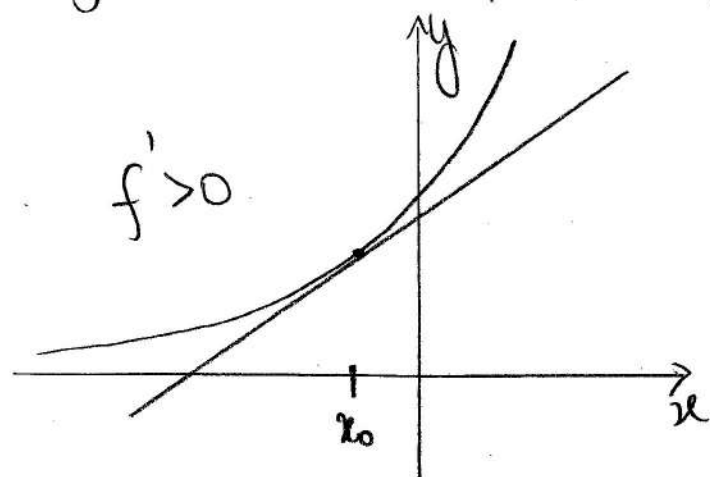
$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{<0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

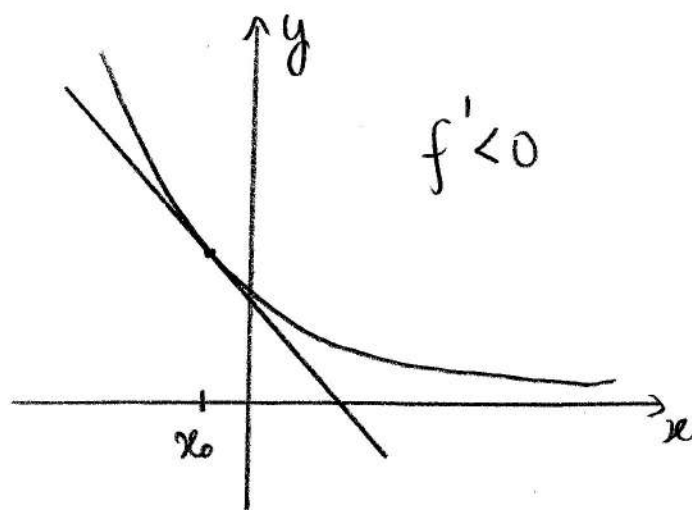
Logo, f é decrescente em (a, b) . ~~///~~

O sinal da derivada nos fornece a informação se a reta tangente é crescente ou decrescente.

Veja uma interpretação geométrica:



tangente crescente



tangente decrescente

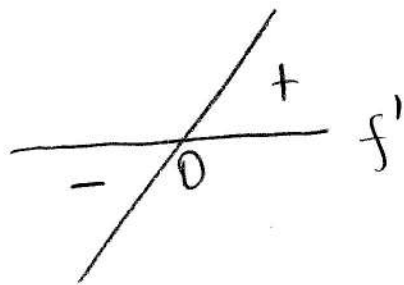
Exemplos

Vamos determinar as regiões de crescimento/decrescimento:

1) $f(x) = x^2 + 3$.

Veja que $f'(x) = 2x$.

Precisamos analisar o sinal de f' :



Daí,

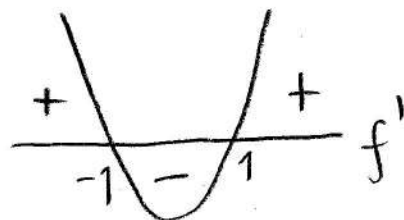
• $f'(x) > 0$ em $(0, +\infty) \Rightarrow f$ é crescente em $\mathbb{R}_+$.

• $f'(x) < 0$ em $(-\infty, 0) \Rightarrow f$ é decrescente em $\mathbb{R}_-$.

$$2) f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$\text{Temos } f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

O sinal de f' é



Logo,

- $f'(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f$ crescente em $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$
- $f'(x) < 0$ em $(-1, 1) \Rightarrow f$ decrescente em $(-1, 1)$.

Obs.: Tanto faz falar que f é crescente ou decrescente em $[a, b]$ ou (a, b) , a monotonicidade da função não muda por causa de 1 ou 2 pontos, onde a derivada se anula. Esses são pontos onde, provavelmente f troca sua monotonicidade.

Escolho usar intervalos abertos.

$$3) f(x) = \ln x.$$

$$\text{Temos } f'(x) = \frac{1}{x}.$$

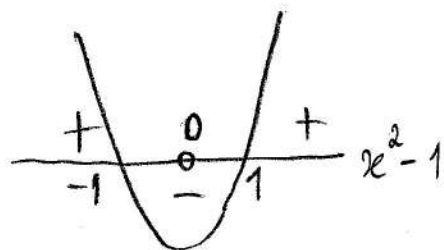
- Se $x > 0$, então $f'(x) = 1/x > 0 \Rightarrow f$ é crescente em $(0, +\infty)$.
- Como $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, não podemos ter $f'(x) = 1/x$ negativa.

Logo, f é crescente em $\mathbb{R}_+^*$.

4) Seja $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Veja que $f'(x) = x' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Como $x^2 > 0$, o sinal de f' é dado pelo sinal de $x^2 - 1$:



Portanto:

- $f'(x) > 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f$ cresce em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Veja que $D(f) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $f'(x) < 0$ em $(-1, 1) \setminus \{0\} \Rightarrow f$ decresce em $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

5) Considere $f(x) = a^x$.

Temos $f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Como $a^x > 0$, temos

- $a > 1 \Rightarrow \ln a > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ em $\mathbb{R} \Rightarrow f$ cresce em $\mathbb{R}$.
- $0 < a < 1 \Rightarrow \ln a < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ em $\mathbb{R} \Rightarrow f$ decresce em $\mathbb{R}$.

Em suma:

- $a > 1 \Rightarrow f(x) = a^x$ crescente.
- $0 < a < 1 \Rightarrow f(x) = a^x$ decrescente.

6) Seja $f(x) = \sin x$.

Temos $f'(x) = \cos x$.

O sinal da função cosseno é

$$\begin{cases} \cos x > 0 & \text{em} & \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right) & \text{para } k \text{ ímpar} \\ \cos x < 0 & \text{em} & & k \text{ par} \end{cases}$$

Portanto,

$f(x) = \sin x$ é $\begin{matrix} \text{crescente} \\ \text{decrecente} \end{matrix}$ em $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right)$ para $\begin{matrix} k \text{ ímpar} \\ k \text{ par} \end{matrix}$

7) Considere $f(x) = x^4 - x^2$.

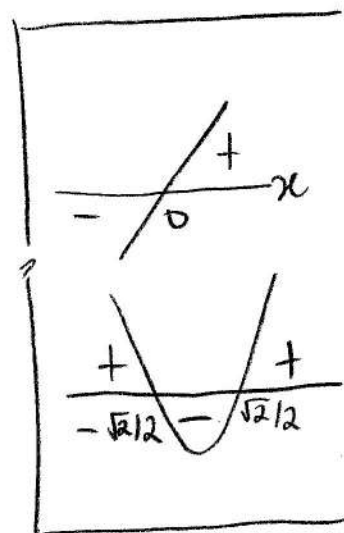
Veja que $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$.

O sinal dessa função é

$$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & 0 & + & + & + & + \\ \hline & & & 0 & & & & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & - & - & - & + & + \\ \hline -\sqrt{2}/2 & & & & & \sqrt{2}/2 & & 2x^2 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & + & - & + \\ \hline -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & & 2x(2x^2 - 1) \end{array}$$



Logo,

- f é crescente em $(-\sqrt{2}/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$.
- f é decrescente em $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (0, \sqrt{2}/2)$.

Determinação de extremos

Teorema 6 (Teste da derivada primeira - TD1ª)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e x_0 um ponto crítico. Considere f derivável em $(a, b) \setminus \{x_0\}$.

Temos que

1) Se

- $f'(x) > 0$ para $x < x_0$
- $f'(x) < 0$ para $x > x_0$

então x_0 é ponto de máximo de f .

2) Se

- $f'(x) < 0$ para $x < x_0$
- $f'(x) > 0$ para $x > x_0$

então x_0 é ponto de mínimo de f .

3) Se

- $f'(x) > 0$ em (a, b) ou
- $f'(x) < 0$ em (a, b) ,

então f não possui nem máximo, nem mínimo no intervalo (a, b) .

Vamos demonstrar e depois fazer um resumo / esquema.

Prova:

1) Como $f'(x) > 0$ para $x < x_0$, pelo Teste C/D, temos que f é crescente para $x < x_0$, ou seja,

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in (a, x_0).$$

Pelo mesmo motivo, $f'(x) < 0$ para $x > x_0$ implica que f é decrescente em $(x_0, b]$:

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in (x_0, b).$$

Logo, concluímos que

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\},$$

isto é, x_0 é ponto de máximo em (a, b) .

2) Pelo Teste C/D, temos

- $f'(x) < 0$ para $x < x_0 \Rightarrow f$ é decrescente para $x < x_0$.
- $f'(x) > 0$ para $x > x_0 \Rightarrow f$ é crescente para $x > x_0$.

O que implica

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\},$$

isto é, x_0 é ponto de mínimo de f em (a, b) .

3) Suponha que $f'(x) > 0$ em (a, b) .

Daí,

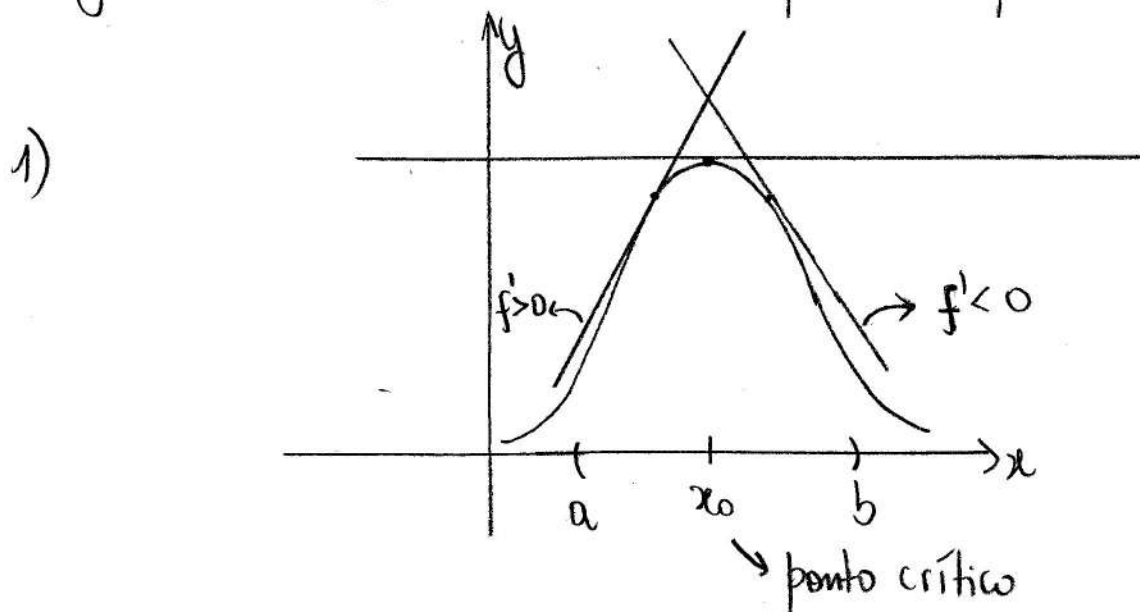
- $f'(y) > 0$ para $y < x_0 \Rightarrow f$ crescente para $y < x_0$
- $f'(x) > 0$ para $x > x_0 \Rightarrow f$ crescente para $x > x_0$

O que implica

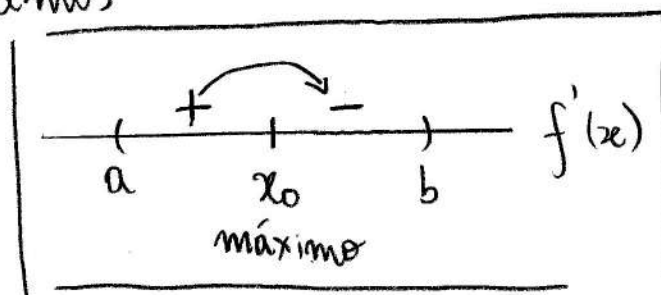
$$f(y) < f(x_0) < f(x)$$

para $y \in (a, x_0)$ e $x \in (x_0, b)$. Isso significa x_0 não pode ser máximo nem mínimo (locais) de f . O caso em que $f'(x) < 0$ em (a, b) é análogo. ~~✗~~

Agora, vamos fazer uma interpretação para cada caso:

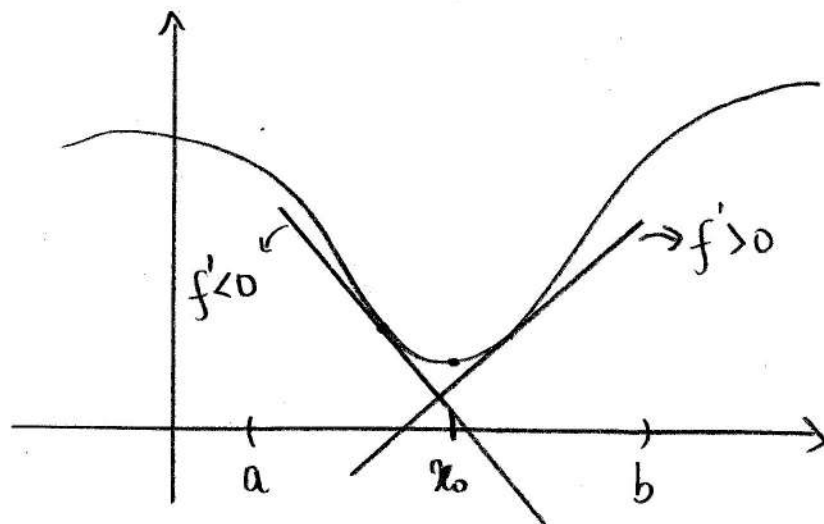


No sinal temos

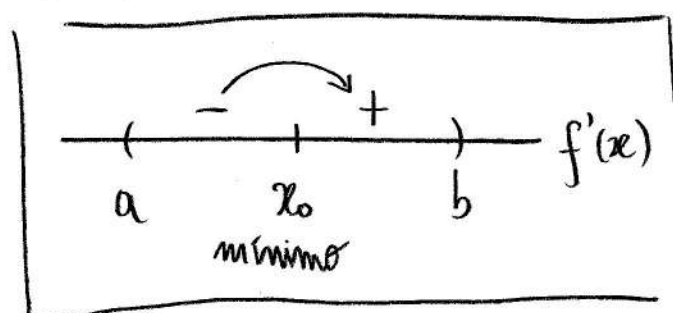


(+ $\xrightarrow{\text{max}}$ -)

2)

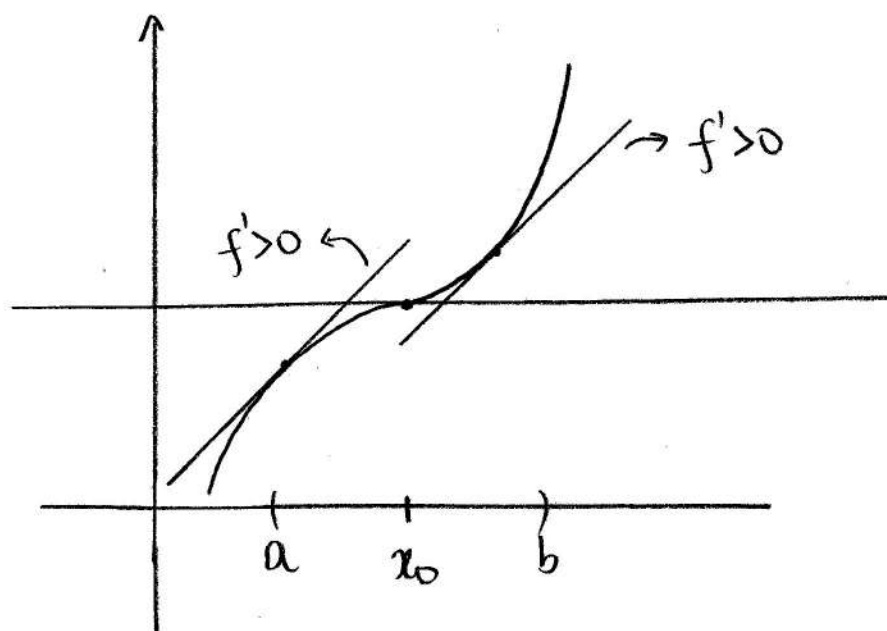


No sinal de f' fica:

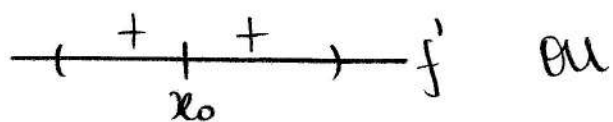


mín.
(- → +)

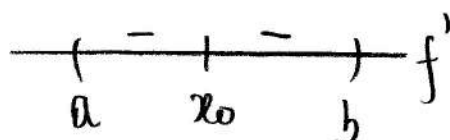
3)



O sinal é



ou



não muda o sinal de f' .

Vejam os alguns exemplos:

1) Considere $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Veja que

$$f'(x) = a \neq 0$$

Logo, f não possui pontos críticos e assim não podemos usar o TD1ª.

2) Tome $f(x) = ax^2 + bx + c$, para $a \neq 0$. Temos

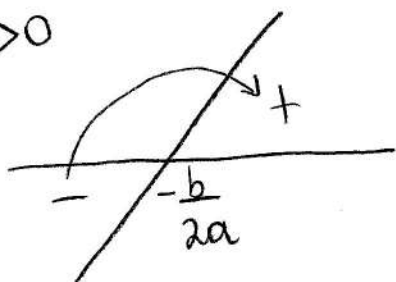
$$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$$

Daí,

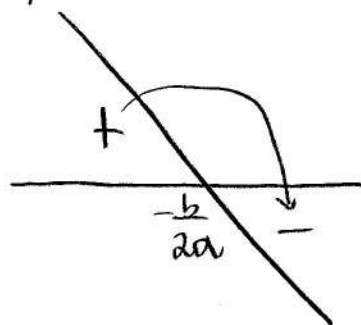
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ (x do vértice)}$$

O sinal de $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ depende de a :

• $a > 0$



• $a < 0$



Por 2), temos que $x = -\frac{b}{2a}$ é um ponto de mínimo.

Por 1), segue que $x = -\frac{b}{2a}$ é um ponto de máximo.

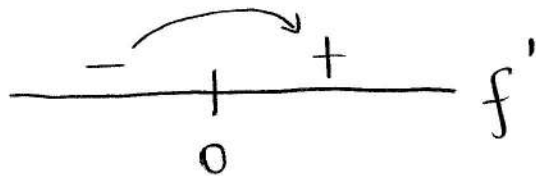
3) Seja $f(x) = |x|$

Temos que $x=0$ é ponto crítico.

Lembre que

$$f'(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Daí, o sinal de $f'(x)$ é



Por 2), temos que $x=0$ é ponto de mínimo.

4) Tome $f(x) = x^3$. Daí,

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ é ponto crítico.}$$

Como $f'(x) = 3x^2 > 0$ para $x \neq 0$, seu sinal é

$\frac{+}{-} \frac{+}{-}$ $f'(x) = 3x^2$

Por 3), $x=0$ não é ponto de máximo ou mínimo.

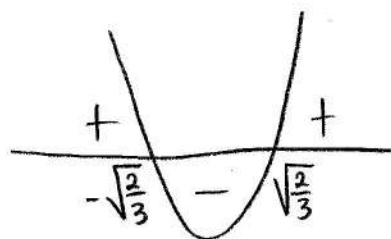
5) Seja $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Temos que $f'(x) = 3x^2 - 2$.

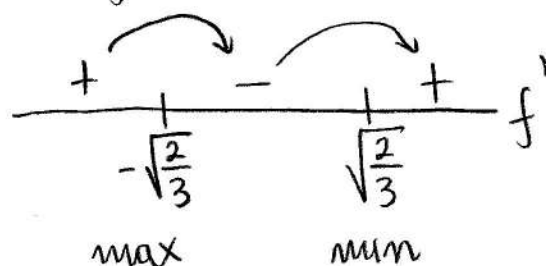
Se $f'(x) = 0$, então

$$3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{pontos críticos})$$

1) sinal de $f'(x) = 3x^2 - 2$ é



Em intervalo fica:



Logo,

- $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ é ponto de mínimo e

- $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ é ponto de máximo.

6) Considere $f(x) = 6x^5 + 5x - 2$.

Veja que $f'(x) = 30x^4 + 5 = 5(6x^4 + 1)$.

Como $f'(x) = 30x^4 + 5 > 0$, temos que f não possui pontos críticos. Dessa forma, não podemos usar o TD 1ª.

7) Considere $f(x) = \sqrt{x}$.

Como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x=0$ é ponto crítico.

Porém, não podemos tomar intervalo aberto contendo $x=0$, uma vez que $D(f) = [0, \infty)$. Nesse exemplo, também não podemos usar o TD1ª.

8) Considere $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$.

Temos que

$$f'(x) = \frac{2x}{2} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}.$$

Se $f'(x) = 0$, então

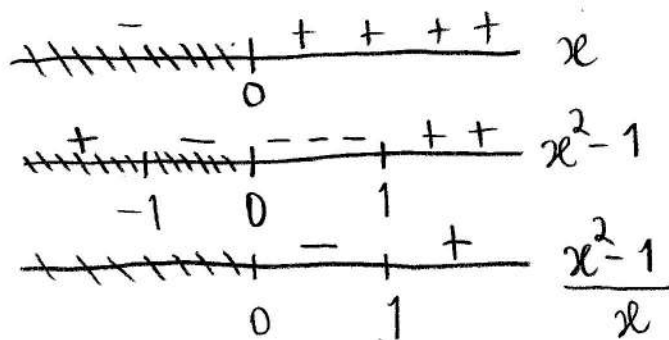
$$x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Como $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, temos que somente $x=1$ é ponto crítico.

Temos

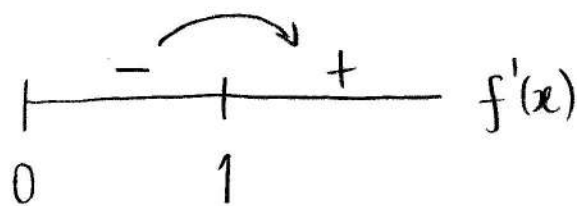
$$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

O sinal de f' é dado por



Obs.: Tiramos a parte onde $x < 0$, pois $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Logo, o sinal de f' é



Por 2), temos que $x=1$ é mínimo de f .

9) Considere $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

Veja que $D(f) = \mathbb{R}$.

Temos que

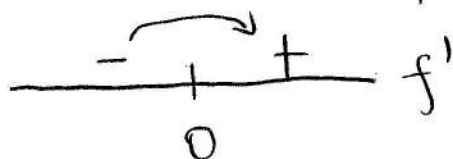
$$f'(x) = (x^{2/3})' - 1' = \frac{2}{3} x^{2/3-1} - 0 = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Daí, f' não está definida em $x=0$, o qual é um ponto crítico de f .

Se $y = \sqrt[3]{x}$, então

- $x > 0 \Rightarrow x = |x| \Rightarrow y = \sqrt[3]{|x|} > 0$
- $x < 0 \Rightarrow x = -|x| \Rightarrow y = \sqrt[3]{-|x|} = -\sqrt[3]{|x|} < 0$.

Daí, o sinal de f' é dado pelo sinal de $y = \sqrt[3]{x}$:



Logo, $x=0$ é um ponto de mínimo.

10) Considere

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Veja que $D(f) = \mathbb{R}$.

Temos

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' = \left((x^2+1)^{-1} \right)' = -1 (x^2+1)^{-2} \cdot (x^2+1)'$$

$$= - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{-x}{(x^2+1)^2}$$

Como $(x^2+1)^2 > 0$, o sinal de f' é dado pelo sinal de $y = -x$. Veja que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{-x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 //$$

Temos que o sinal de f' é:

$$\begin{array}{c} + \quad \quad \quad - \\ \hline \quad \quad | \quad \quad \quad \\ \quad \quad 0 \quad \quad \quad \end{array} \quad (-x)$$

Logo, $x=0$ é ponto de máximo de f .

11) Considere $f(x) = \ln(x^2 - x + 2)$.

Como $\Delta < 0$ e a concavidade de $y = x^2 - x + 2$ é para cima, temos que

$$x^2 - x + 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $D(f) = \mathbb{R}$.

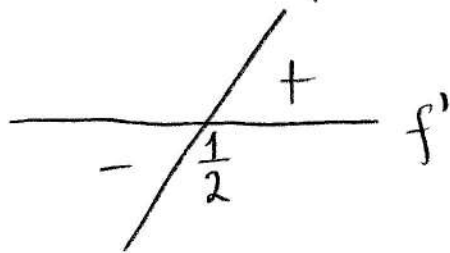
Veja que

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - x + 2} \cdot (x^2 - x + 2)' = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2}.$$

Se $f'(x) = 0$, então

$$\frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ é ponto crítico}$$

O sinal de f' é dado por $y = 2x - 1$:



Logo, por 2) temos que $x = \frac{1}{2}$ é mínimo de f .

Teorema 7 (Teste da derivada segunda - TD2ª)

Seja f uma função duas vezes derivável e x_0 um ponto crítico em (a,b) de forma que $f'(x_0)=0$. Se

1) $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local.

2) $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local.

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - 0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} \end{aligned}$$

2) Como $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$, pela permanência do sinal, existe um intervalo aberto I contendo x_0 tal que

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0, \quad \forall x \in I.$$

- Se $x > x_0$, então $x - x_0 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \quad \forall x > x_0$
- Se $x < x_0$, então $x - x_0 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \quad \forall x < x_0$

Daí, o sinal de f' é

$$\begin{array}{c} + \quad \curvearrowright \quad - \\ \hline x_0 \end{array} f'$$

Por 1) do TD1ª, temos que x_0 é máximo.

1.) Como $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 de forma que

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in I.$$

Logo,

- Se $x > x_0$, então $x - x_0 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > x_0$.
- Se $x < x_0$, então $x - x_0 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x < x_0$.

Resumindo:

$$\begin{array}{c} \quad \quad \quad \curvearrowright \quad \quad \\ - \quad \quad + \\ \hline x_0 \end{array} f'(x)$$

Por 2) do TD1ª, temos que x_0 é mínimo.

Obs.: Se $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo. ~~///~~

Exemplos

1) Tome $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$.

O ponto crítico de f é

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Veja que

$$f''(x) = 2 \cdot a \Rightarrow f''\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2 \cdot a.$$

Se :

• $a > 0$, então $f''\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2 \cdot a > 0 \xrightarrow{\text{TD2}^a} x = -\frac{b}{2a}$ é mínimo

↳ concavidade p/ cima

• $a < 0$, então $f''\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2 \cdot a < 0 \xrightarrow{\text{TD2}^a} x = -\frac{b}{2a}$ é máximo.

↳ conc. p/ baixo

2) Considere $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

Temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x \\ &= x \cdot (x + 2) \cdot e^x \end{aligned}$$

Se $f'(x) = 0$, então

$$x \cdot (x + 2) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } -2,$$

uma vez que $e^x > 0$.

Logo, os pontos críticos de f são $x=0$ e $x=-2$.

Veja que

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2 + 2x) \cdot e^x)' \\ &= (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x) \cdot e^x \\ &= (2x + 2 + x^2 + 2x) \cdot e^x \\ &= (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x \end{aligned}$$

Temos:

$$\bullet f''(0) = (0^2 + 4 \cdot 0 + 2) \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2 > 0$$

$\stackrel{TD2^a}{\Rightarrow} x=0$ é mínimo //

$$\begin{aligned} \bullet f''(-2) &= ((-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 2) \cdot e^{-2} \\ &= (4 - 8 + 2) \cdot \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{e^2} < 0$$

$\Rightarrow x=-2$ é máximo //

Veja que $x=-2$ é máximo local, já que

$$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} < e = 1^2 \cdot e^1 = f(1).$$

Já $x=0$ é mínimo global, pois

$$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0 \leq x^2 \cdot e^x = f(x), \text{ pois } x^2 \geq 0 \text{ e } e^x > 0.$$

3) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

Temos

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Aqui, não podemos usar o TD2ª, uma vez que f' não está definida em $x=0$.

4) Considere $f(x) = e^x - x$

Temos $f'(x) = e^x - 1$. Daí,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ é ponto crítico.}$$

Veja que $f''(x) = e^x$. Logo,

• $f''(0) = e^0 = 1 > 0 \xrightarrow{\text{TD2ª}} x=0 \text{ é ponto de mínimo.}$

5) Tome $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$.

Já mostramos que $x=1$ é o ponto crítico de f .

Temos que

$$f''(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

Daí,

$$f''(1) = 1 + \frac{1}{1^2} = 2 > 0 \xrightarrow{\text{TD2ª}} x=1 \text{ é mínimo.}$$

6) Se a derivada segunda é nula, o TD2º é inconclusivo.
De fato, Considere

$$f(x) = x^3 \quad \text{e} \quad g(x) = x^4$$

Temos

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \\ \bullet g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0$$

Logo, $x=0$ é ponto crítico de f e de g .

Como $f''(x) = 6x$ e $g''(x) = 12x^2$, segue que

$$f''(0) = 6 \cdot 0 = 0 \quad \text{e} \quad g''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$$

Porém, já provamos que $x=0$ não é extremo de $f(x) = x^3$.

Vamos usar o TD1º em g .

O sinal de $g'(x) = 4x^3$ é

$$\begin{array}{c} - \quad + \\ \hline 0 \end{array} \quad g'$$

Isso implica que $x=0$ é ponto de mínimo de g .

Em suma, temos $f''(0) = 0 = g''(0)$, mas

• $x=0$ não é extremo de $f(x) = x^3$.

• $x=0$ é mínimo de $g(x) = x^4$.

Observação: O TD2ª é prático pois não precisamos analisar o sinal de uma função. Basta analisar o sinal do número $f''(x_0)$.

Por outro lado, o teste é limitado:

- Se f' não está definida no ponto crítico x_0 .
- se $f''(x_0) = 0$.

Dessa forma, o TD1ª é mais completo.

A seguir vamos comparar os 2 testes em alguns exemplos:

7) Considere $f(x) = x^7 - x^5 + 3$.

Temos que

$$f'(x) = 7x^6 - 5x^4 = x^4(7x^2 - 5)$$

Se $f'(x) = 0$, então

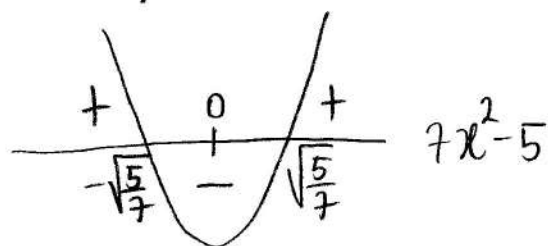
$$x^4(7x^2 - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 7x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{7} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{7}} \end{cases}$$

Logo, f possui 3 pontos críticos.

Veja que

$$f''(x) = (7x^6 - 5x^4)' = 42x^5 - 20x^3.$$

Pelo TD1ª, precisamos analisar o sinal de $f'(x) = x^4(7x^2 - 5)$.
Como $x^4 \geq 0$, temos que o sinal de f é dado pelo sinal de



Logo, pelo TD1ª segue que:

- $x = \sqrt{\frac{5}{7}}$ é ponto de mínimo.
- $x = -\sqrt{\frac{5}{7}}$ é ponto de máximo.
- $x = 0$ não é extremo.

Se fossemos usar o TD2ª:

$$\begin{aligned} \bullet f''\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right) &= 42 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^5 - 20 \left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^3 = 42 \cdot \frac{5^2}{7^2} \sqrt{\frac{5}{7}} - 20 \cdot \frac{5}{7} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \\ &= 6 \cdot \frac{25}{7} \sqrt{\frac{5}{7}} - 20 \cdot \frac{5}{7} \sqrt{\frac{5}{7}} = (150 - 100) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \\ &= 50 \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} > 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{7}} \text{ é mínimo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right) &= 42 \cdot \left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^5 - 20 \left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^3 = -42 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^5 + 20 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^3 \\ &= - \underbrace{\left(42 \left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^5 - 20 \left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^3\right)}_{>0} < 0 \\ &\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{7}} \text{ é máximo} \end{aligned}$$

• $f''(0) = 42 \cdot 0^5 - 20 \cdot 0^3 = 0 \Rightarrow$ teste é inconclusivo.

8) Seja $f(x) = x - \sin x$

Veja que $f'(x) = 1 - \cos x$.

Se $f'(x) = 0$, então

$1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = k \cdot \pi$, k par. ↗ pto críticos

Temos que $f''(x) = (1 - \cos x)' = \sin x$.

Veja que

$f''(k \cdot \pi) = \sin(k\pi) = 0$

Logo, o TD2ª é inconclusivo aqui.

Vamos analisar o sinal de $f'(x) = 1 - \cos x$.

Observe que

• $f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \Rightarrow \cos x < 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \text{ par}\}$
↳ aqui é = 1

• $f'(x) < 0 \Rightarrow 1 - \cos x < 0$

$\Rightarrow \cos x > 1$, mas essa desigualdade não possui solução,
 pois $\cos x \in [-1, 1]$.

Logo, o sinal de $f'(x)$ é

$$\begin{array}{c} + \quad + \\ \hline k\pi \end{array} f'$$

Pelo TD1ª, concluímos que $x = k\pi$, k par, não é máximo, nem mínimo de $f(x) = x - \sin x$.

9) Considere $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

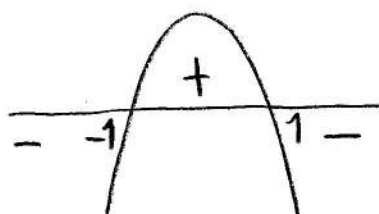
A derivada é

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Se $f'(x) = 0$, então

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ (pts críticos)}$$

Como $x^2+1 > 0$, o sinal de f' é dado pelo sinal de $y = 1-x^2$:



Pelo TD1ª, temos que:

- $x = -1$ é ponto de mínimo e
- $x = 1$ é ponto de máximo.

Se fossemos usar o TD2ª, teríamos de obter f'' :

$$f''(x) = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{(1-x^2)' \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot ((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4}$$

$$= \text{contas} \dots = - \frac{2x[(x^2+1)^2 + 2(1-x^4)]}{(x^2+1)^4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = \frac{-2 \cdot (4+2 \cdot 0)}{2^4} < 0 \Rightarrow x=1 \text{ é máximo.} \\ f''(-1) = \frac{2(4+2 \cdot 0)}{2^4} > 0 \Rightarrow x=-1 \text{ é mínimo.} \end{cases}$$

Aqui, o trabalho é maior...

Concavidade e pontos de inflexão

Definição: Considere uma função derivável em (a,b) .

Dizemos que f é

1) Côncava para cima em (a,b) se f' é crescente em (a,b) ,
ou seja,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

2) Côncava para baixo em (a,b) se f' é decrescente em (a,b) ,
ou seja,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

Vamos fazer uma interpretação geométrica.

Quanto maior o módulo do coeficiente angular, mais inclinada será a reta.

Considere as retas tangentes:

$$r: y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \text{e} \quad s: y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$$

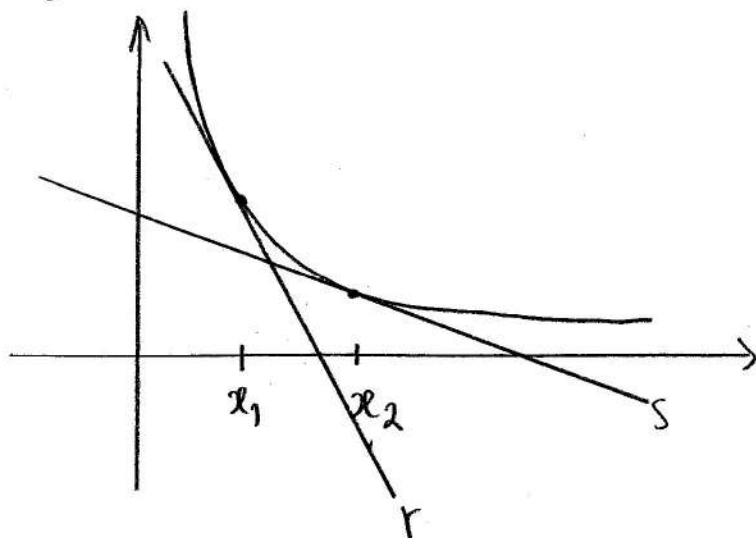
Considere os casos

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) < 0 \\ 2) \ x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < f'(x_1) < f'(x_2) \end{array} \right\} \text{conc. p/ cima}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) \ x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2) > 0 \\ 4) \ x_1 < x_2 \Rightarrow 0 > f'(x_1) > f'(x_2) \end{array} \right\} \text{conc. p/ baixo}$$

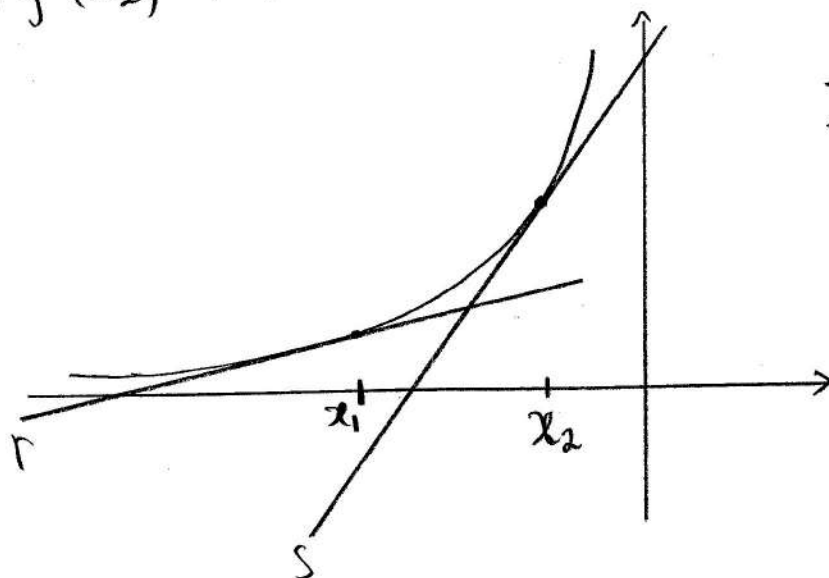
Vamos desenhar

1) $|f'(x_1)| > |f'(x_2)|$: r mais inclinada que s :



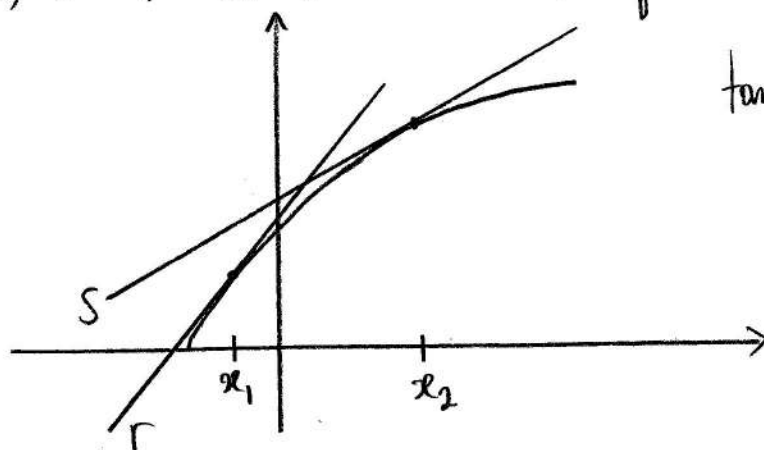
tangentes decrescentes

2) $f'(x_1) < f'(x_2)$: s mais inclinada do que r



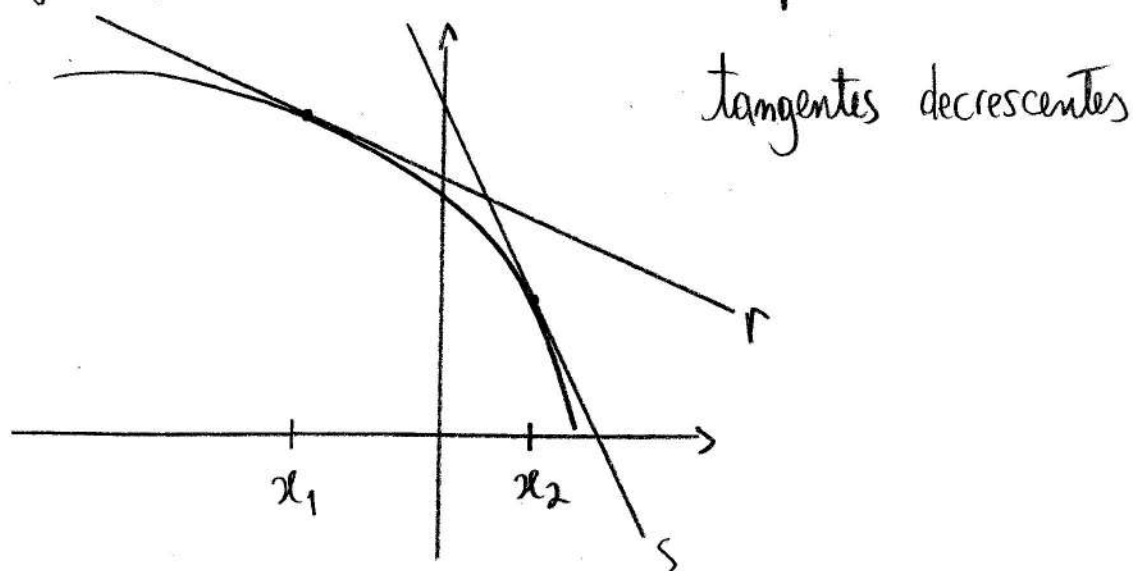
tangentes crescentes

3) $f'(x_1) > f'(x_2)$: r mais inclinada que s



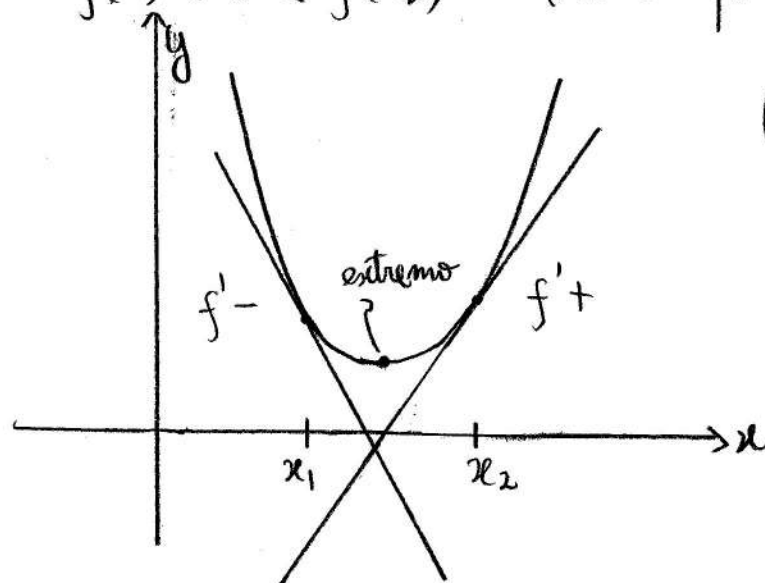
tangentes crescentes

4) $|f'(x_1)| < |f'(x_2)|$: s mais inclinada que r

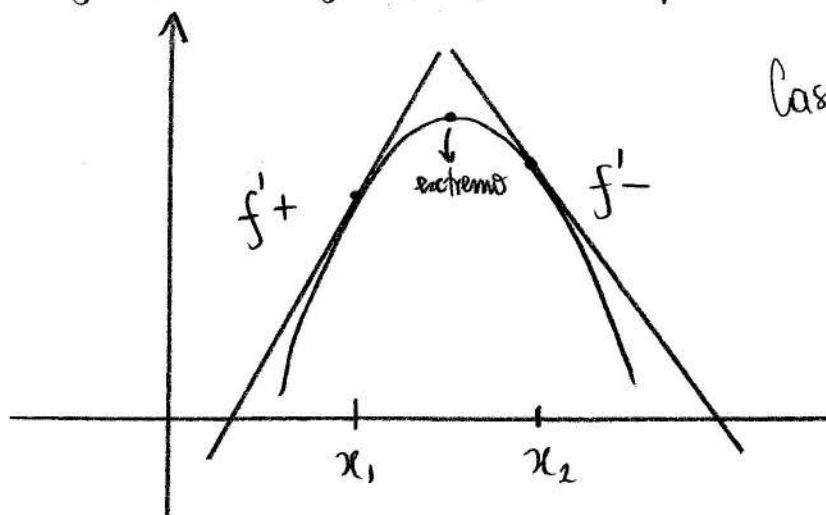


Temos 2 casos variantes:

5) $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$ (conc. p/ cima)

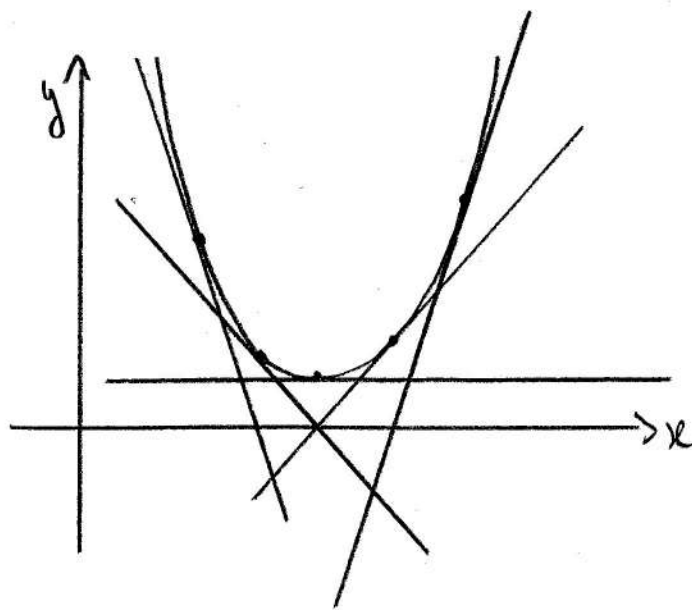


6) $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) > 0 > f'(x_2)$ (conc. p/ baixo)

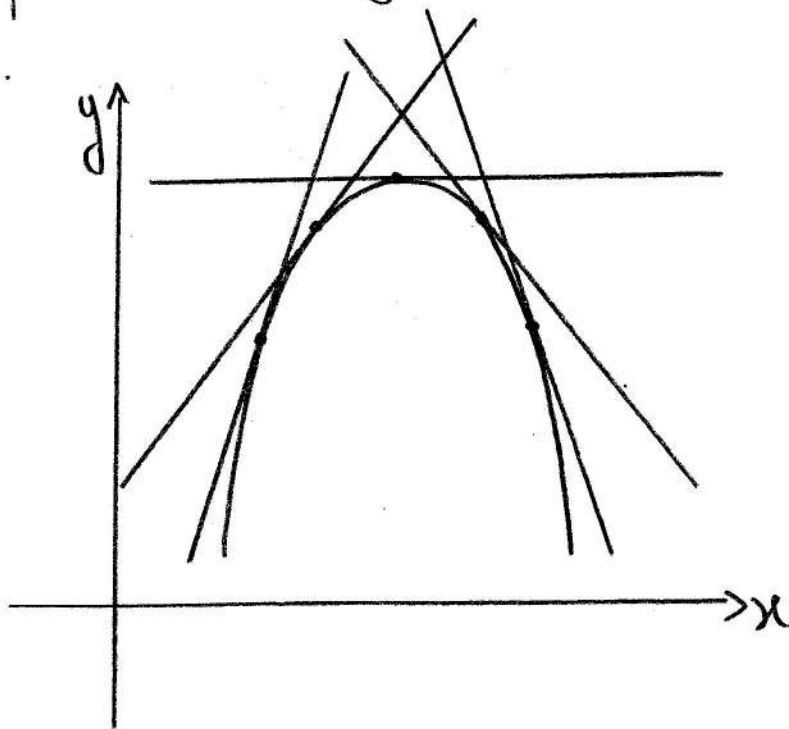


Em suma, a concavidade está relacionada com a abertura do gráfico da função. Existe uma outra caracterização para concavidade:

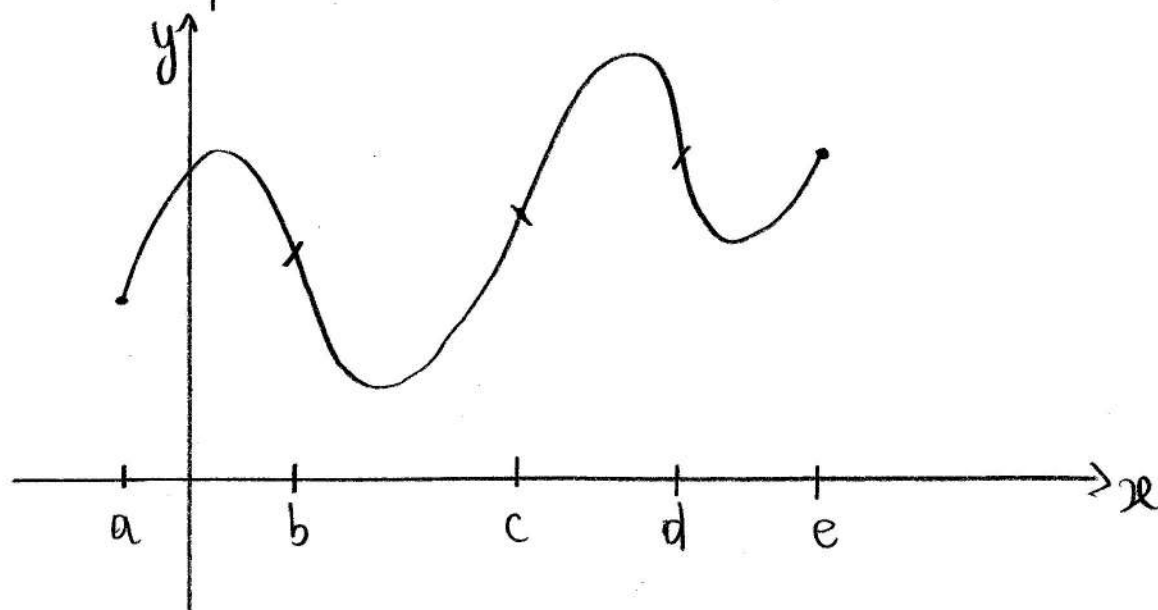
- Concavidade para cima: o gráfico está acima de suas retas tangentes:



- Concavidade para baixo: o gráfico está abaixo de suas retas tangentes.



Podem existir regiões onde f tem concavidade para cima e outras em que a concavidade é para baixo:



→ f tem concavidade para cima (CPC) em (b, c) e (d, e) .

→ f tem concavidade para baixo (CPB) em (a, b) e (c, d) .

Teorema 8 (Teste de concavidade)

Seja f duas vezes derivável em (a, b) . Então,

1) Se $f''(x) > 0$ em (a, b) , então f é côncava p/cima em (a, b) .

2) Se $f''(x) < 0$ em (a, b) , então f é côncava p/baixo em (a, b) .

Prova: Consequência direta do Teste C/D:

1) Se $f''(x) = (f'(x))' > 0$, então f' é crescente e portanto tem concavidade para cima.

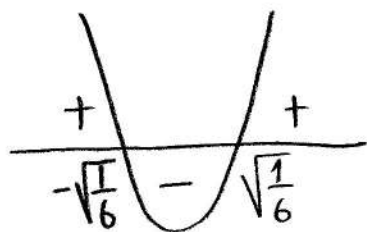
2) Se $f''(x) = (f'(x))' < 0$, então f' é decrescente e portanto côncava para baixo. $\#$

Exemplos

1) Considere $f(x) = x^4 - x^2$.

Temos $f''(x) = 12x^2 - 2 = 2(6x^2 - 1)$.

O sinal de f'' é dado pelo sinal de $6x^2 - 1$:



Pelo teste de concavidade:

- $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -\sqrt{1/6}) \cup (\sqrt{1/6}, \infty)$

$\Rightarrow f$ é C.P.C em $(-\infty, \sqrt{1/6}) \cup (\sqrt{1/6}, \infty)$.

- $f''(x) < 0$ em $(-\sqrt{1/6}, \sqrt{1/6}) \Rightarrow f$ é C.P.B. em $(-\sqrt{1/6}, \sqrt{1/6})$.

2) Seja $f(x) = 3x - \ln x$.

Veja que $f'(x) = 3 - \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$.

Como $\frac{1}{x^2} > 0$, concluímos que:

- f é C.P.C em $D(f) = \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$.

3) Defina $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$. ($D(f) = [0, \infty)$)

Temos

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot (x^{-1/2})'$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-3/2} = 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 2 + \frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

Como $D(f) = [0, \infty)$.

Se $x > 0$, temos que $f''(x) = 2 + \frac{1}{4x\sqrt{x}} > 0$.

Logo, pelo teste de concavidade concluímos que:

f é C.P.C. em $(0, \infty)$.

Veja que tiramos $x=0$ pois f sequer é derivável em $x=0$.

4) Seja $f(x) = \ln x$

Temos $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f$ é C.P.B. em $(0, \infty)$.

5) Seja $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$.

Temos que $f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$. Daí,

- Se n é par, então $n-2$ é par $\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ é C.P.C. em $\mathbb{R}$.

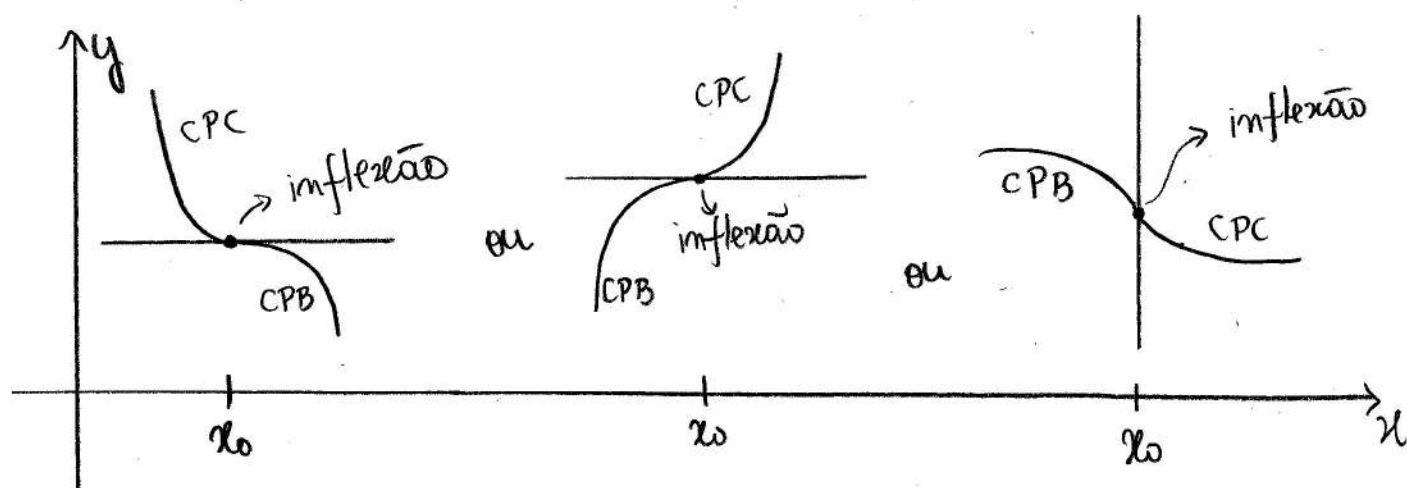
- Se n é ímpar, então $n-2$ é ímpar

$\Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 \text{ em } (0, \infty) \Rightarrow f \text{ é C.P.C. em } (0, \infty). \\ f''(x) < 0 \text{ em } (-\infty, 0) \Rightarrow f \text{ é C.P.B. em } (-\infty, 0). \end{cases}$

Definição: $x_0 \in D(f)$ é dito ser um ponto de inflexão de f se f troca de concavidade em torno de x_0 , ou seja, considerando $x_0 \in (a, b)$, temos

- 1) f é CPC em (a, x_0) e CPB em (x_0, b) ou
- 2) f é CPB em (a, x_0) e CPC em (x_0, b) .

Geometricamente:



Se x_0 é um ponto de inflexão, então como o sinal de f'' muda, devemos ter $f''(x_0) = 0$. Daí, os candidatos a ponto de inflexão são aqueles $x \in D(f)$ tais que

$$f''(x) = 0,$$

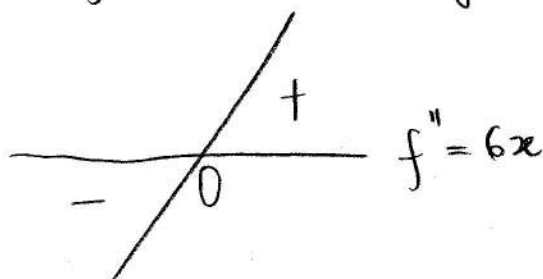
mas nem sempre isso acontece.

Para obter os pontos de inflexão, vamos estudar o sinal de f'' para analisar a concavidade. Por esse motivo, é comum analisar concavidade e os pontos de inflexão concomitantemente.

Exemplos

1) Seja $f(x) = x^3$.

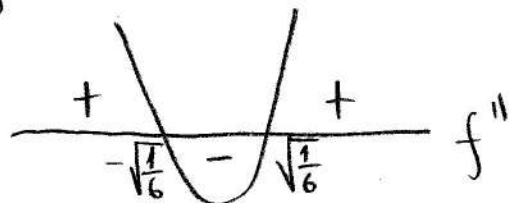
Temos que $f''(x) = 6x$, cujo sinal é:



Logo, $x=0$ é um ponto de inflexão de f .

2) Considere $f(x) = x^4 - x^2$

Veja que $f''(x) = 12x^2 - 2 = 2(6x^2 - 1)$, cujo sinal é

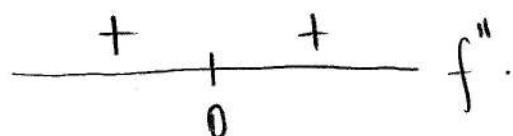


Logo, os pontos de inflexão de f são $x = \pm \sqrt{\frac{1}{6}}$.

3) Seja $f(x) = x^4$.

Veja que $f'' = 12x^2$.

Temos que $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$. Porém, como $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ temos que $x=0$ não é ponto de inflexão.



Nesse exemplo, f não possui pontos de inflexão.

4) Considere $f(x) = x - \sin x$.

261

Temos que $f''(x) = x'' - (\sin x)'' = 0 - (-\sin x) = \sin x$.

O sinal de $f''(x) = \sin x$ é:

$$\begin{cases} \sin x > 0 & \text{em } (k\pi, (k+1)\pi) \text{ para } k \text{ par} \\ \sin x < 0 & \text{em } (k\pi, (k+1)\pi) \text{ para } k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Logo, os pontos de inflexão de $f(x) = x - \sin x$ são:

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5) Tome $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(1-x)$. ($D(f) = (-\infty, 1)$)

Veja que

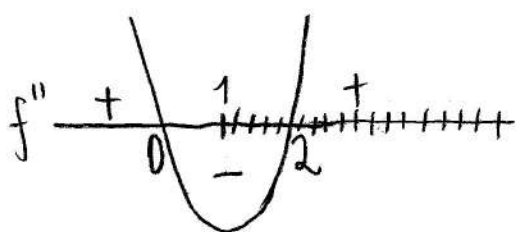
$$f'(x) = \frac{2x}{2} + \frac{(1-x)'}{1-x} = x - \frac{1}{1-x}.$$

$$\Rightarrow f''(x) = x' - ((1-x)^{-1})' = 1 - (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (1-x)'$$

$$= 1 + \frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = 1 - \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{(1-x)^2 - 1}{(1-x)^2} = \frac{-2x + x^2}{(1-x)^2}.$$

Como $(1-x)^2 > 0$, o sinal de f'' é dado pelo sinal de $-2x + x^2$:



$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ é C.P.B em } (0, 1) \\ f \text{ é C.P.C em } (-\infty, 0) \\ x=0 \text{ é o ponto de inflexão de } f. \end{cases}$

6) Seja $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Temos $f''(x) = (e^x)' - \left(\frac{x^2}{2}\right)' = e^x - 1$.

Veja que $f''(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Ademais,

• $f''(x) > 0 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$.

• $f''(x) < 0 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow x < 0$.

Logo, o sinal de f'' é

$$\begin{array}{c} - \quad + \\ \hline 0 \end{array} f''$$

Logo, $x = 0$ é ponto de inflexão de f .

Teorema 9 (Teste da derivada terceira - TD3ª)

Seja f uma função três vezes derivável em (a, b) .

Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então x_0 é ponto de inflexão.

Prova: Basta usar o TD2ª em f' .

Como $f''(x_0) = 0 \Rightarrow (f')'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ é ponto crítico de f' .

Daí, pelo teste da derivada segunda em f' :

• Se $f'''(x_0) > 0 \Rightarrow (f')''(x_0) > 0$, então x_0 é mínimo de f' ,
o que implica que $(f')' = f''$ muda o sinal de $-$ para $+$ em x_0 .

• Se $f'''(x_0) < 0 \Rightarrow (f')''(x_0) < 0$, então x_0 é máximo de f' ,
o que implica que $(f')' = f''$ muda o sinal de $+$ para $-$ em x_0 .

Em ambos os casos, concluímos que x_0 é ponto de inflexão. $\#$

Exemplos:

262,5

$$6) f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

Temos que $f''(x) = e^x - 1$.

Se $f''(x) = 0$, então

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Veja que $f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1 \neq 0$. Logo, pelo TD3ª temos que $x=0$ é ponto de inflexão.

$$4) f(x) = x - \sin x$$

Temos

$$\bullet f''(x) = \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet f'''(x) = \cos x \Rightarrow f'''(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{TD3ª} \\ \Rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{l} x = k\pi \\ \text{são pontos} \\ \text{de inflexão} \end{array}$$

→ Considere $f(x) = x^4$ e $g(x) = x^5$.

Temos $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $g''(x) = 20x^3$ e $g'''(x) = 60x^2$.

Veja que

$$\begin{cases} f''(0) = 0 \\ f'''(0) = 0 \end{cases}, \text{ mas já vimos que } f \text{ não tem inflexões.}$$

$$\begin{cases} g''(0) = 0 \\ g'''(0) = 0 \end{cases}, \text{ mas } x=0 \text{ é inflexão, pois } \begin{array}{c} - \quad + \\ \hline \quad 0 \end{array} g''$$

Aplicações de máximos e mínimos

1- Problemas de Otimização

São problemas onde se busca por soluções máximas e/ou mínimas, ou seja, são problemas modelados por uma função onde, a posteriori, se procura por pontos de máximo e/ou mínimo (pelo menos locais).

Vejam os alguns:

1) Obtenha dois números positivos de forma que a soma deles seja 65 e o produto seja o máximo possível.

Sejam x e y tais números.

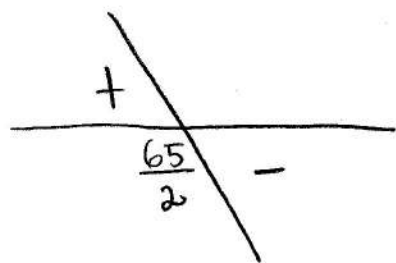
Temos que $x+y=65 \Rightarrow y=65-x$.

Dai, temos que o produto é dado pela função:

$$P(x) = x \cdot y = x \cdot (65-x) = 65x - x^2$$

Achamos o ponto crítico: $P'(x) = 0 \Rightarrow 65 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{65}{2}$.

O sinal de P' é



TD1ª $x = 65/2$ é máximo de P .
 $\Rightarrow$ Logo, os números procurados são
 $x = \frac{65}{2}$ e $y = 65 - \frac{65}{2} = \frac{65}{2}$.

2) Obtenha os pontos da curva $\sqrt{y} \cdot x = 1$ que estão mais próximos da origem.

Seja (x, y) um ponto da curva.

A distância desse ponto à origem é:

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Veja que

$$\sqrt{y} \cdot x = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

Logo,

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}}$$

Derivamos $d(x)$ e igualamos a zero:

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}}} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)' = \frac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{4}{x^5} = 0 \Rightarrow \frac{2x^6 - 4}{x^5} = 0 \Rightarrow 2x^6 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[6]{\frac{4}{2}} = \pm \sqrt[6]{2} \quad (\text{ponto crítico})$$

Como $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}} > 0$, o sinal de d' é dado pelo
sinal de

$$2x - \frac{4}{x^5} = \frac{2(x^6 - 2)}{x^5}$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \sqrt[6]{2} \quad - \quad - \sqrt[6]{2} \quad + \\ \hline x^6 - 2 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \\ \hline x^5 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} - \quad + \\ \hline \frac{2(x^6 - 2)}{x^5} \\ 0 \quad \sqrt[6]{2} \end{array}$$

$$\bullet x = \frac{1}{\sqrt[6]{y}} > 0$$

$$\bullet 0 < x < \sqrt[6]{2}$$

$$\Rightarrow x^6 - 2 < 0$$

$$\bullet x > \sqrt[6]{2} \Rightarrow x^6 - 2 > 0$$

Com isso, podemos dizer que $x = \sqrt[6]{2}$ é mínimo de $d(x)$.
Logo, o ponto com menor distância da origem é tal

que $x = \sqrt[6]{2}$ e $y = \frac{1}{(\sqrt[6]{2})^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{4}} \Rightarrow \left(\sqrt[6]{2}, \frac{1}{\sqrt[6]{4}} \right)$,

cuja distância da origem é

$$d(\sqrt[6]{2}) = \sqrt{(\sqrt[6]{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[6]{4}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sqrt[6]{2^2} + \frac{1}{\sqrt[6]{4^2}}} = \sqrt{\sqrt[6]{2^2} + \frac{1}{\sqrt[6]{2^4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt[6]{2^2 \cdot 2^4} + 1}{\sqrt[6]{2^4}}} = \sqrt{\frac{\sqrt[6]{2^6} + 1}{\sqrt[6]{2^4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{\sqrt[6]{2^4}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{3^3}{4}}}$$

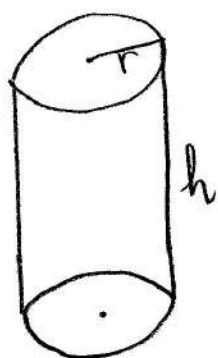
$$= \sqrt[6]{\frac{27}{4}}$$

(distância mínima à origem)

3) Considere uma caixa de água cilíndrica com capacidade de 100 m^3 . Vamos determinar as dimensões da caixa de maneira que a quantidade de matéria-prima para sua fabricação seja a menor possível.

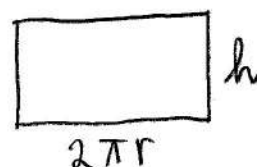
Queremos minimizar a área da caixa.

Seja r o raio da base e h a altura.



A área lateral é

$$A_l = 2\pi r \cdot h$$



A área das duas bases é

$$A_b = 2 \cdot \pi r^2$$

A área total é dada por

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

O volume do cilindro é 100 m^3 . Daí,

$$100 = V = \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow h = \frac{100}{\pi r^2} \quad (*)$$

Daí, reescrevemos a área como função de r :

$$A(r) = 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{200}{r} + 2\pi r^2, \quad r > 0.$$

Derivamos:

$$A'(r) = -\frac{200}{r^2} + 4\pi r$$

Achamos os pontos críticos:

$$A'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{200}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{200}{r^2}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{200}{4\pi} = \frac{50}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \text{ m}$$

Veja que

$$A''(r) = \left(-\frac{200}{r^2} + 4\pi r\right)' = \frac{400}{r^3} + 4\pi > 0, \text{ pois } r > 0$$

Logo, pelo TD 2ª, temos que $r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ é mínimo.

Portanto, as dimensões para construção do cilindro que ocupe a menor quantidade de material são

- raio: $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \text{ m} \approx 2,5154 \text{ m}$

e

- altura: $h = \frac{100}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2} = \frac{100}{\pi \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{20}{\pi^2}}} = \frac{20}{\frac{\pi}{\sqrt[3]{\pi^2}} \cdot \sqrt[3]{20}}$

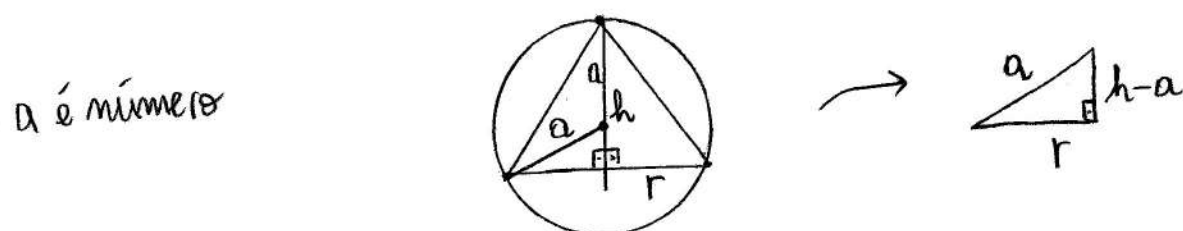
$$= \frac{20^{1-1/3}}{\pi^{1-2/3}} = \frac{20^{2/3}}{\pi^{1/3}} = \frac{\sqrt[3]{20^2}}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{2\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \approx 5,0308 \text{ m}$$

Observe que nesse exemplo a altura deve ser o dobro do raio.

4) Vamos encontrar o maior cone circular que pode ser inscrito em uma esfera de raio medindo a .

→
Vamos buscar pelas dimensões do cone com maior volume e que está inscrito na esfera.

Uma planificação dos sólidos é



Pelo teorema de Pitágoras temos

$$a^2 = r^2 + (h-a)^2 \Rightarrow r^2 = a^2 - (h-a)^2 = 2ah - h^2. (*)$$

O volume do cone é $V = \frac{r^2 h \pi}{3}$.

Por (*), reescrevemos V em função de h :

$$V(h) = \frac{(2ah - h^2) \cdot h \pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot (2ah^2 - h^3), \quad h > 0,$$

Cuja derivada é $V'(h) = \frac{\pi}{3} (4ah - 3h^2)$ e os pontos críticos são dados por:

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} (4ah - 3h^2) = 0 \Rightarrow 4ah - 3h^2 = 0 \Rightarrow h(4a - 3h) = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{4}{3} a // \text{ ou } h = 0 \text{ (não é solução)}$$

Temos

$$V''(h) = \frac{\pi}{3} (4a - 6h)$$

$$\Rightarrow V''\left(\frac{4}{3}a\right) = \frac{\pi}{3} \left(4a - 6 \cdot \frac{4}{3}a\right) = \frac{\pi}{3} (4a - 8a) = -\frac{4\pi}{3} \cdot a < 0$$

Pelo TD.2ª temos que $h = \frac{4}{3}a$ é máximo de V .

Portanto, o cone de maior volume inscrito numa esfera de raio a tem dimensões:

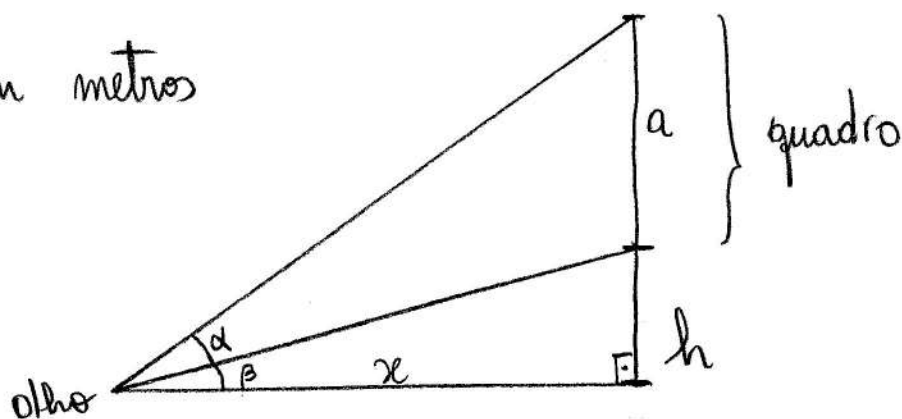
$$\bullet h = \frac{4}{3}a //$$

$$\bullet r^2 = 2 \cdot a \cdot \frac{4}{3}a - \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{8}{3}a^2 - \frac{16}{9}a^2 = \frac{24a^2 - 16a^2}{9} = \frac{8}{9}a^2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{8}{9}a^2} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{2^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a //$$

5) Um quadro de altura a está pendurado de maneira que se situa a uma altura h do nível do olho de um observador. Qual a distância da parede que o observador deve tomar para que possa vislumbrar o quadro da melhor maneira possível?

a e h em metros



Aqui, precisamos usar a Tangente, pois não há dados sobre a hipotenusa.

Seja $\theta = \alpha + \beta$. Veja que

$$\tan \beta = \frac{h}{x} \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{a+h}{x}$$

Temos

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan(\theta - \beta) \stackrel{\text{fórmula trig}}{=} \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{a+h}{x} - \frac{h}{x}}{1 + \frac{a+h}{x} \cdot \frac{h}{x}} \\ &= \frac{\frac{a+h-h}{x}}{1 + \frac{(a+h)h}{x^2}} = \frac{\frac{a}{x}}{\frac{x^2 + ah + h^2}{x^2}} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2 + ah + h^2} = \frac{ax}{x^2 + ah + h^2} \end{aligned}$$

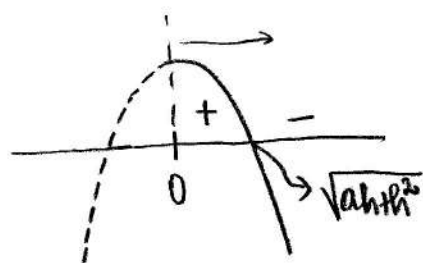
O ângulo α é o ângulo de visão para o quadro, maximizando a tangente, estaremos maximizando esse ângulo. Defina

$$f(x) = \tan \alpha = \frac{ax}{x^2 + ah + h^2} \quad (x > 0)$$

Maximizaremos f . Veja que $f'(x) = \frac{a(h^2 + ah - x^2)}{(x^2 + ah + h^2)^2}$, daí,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow h^2 + ah - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = ah + h^2 \Rightarrow x = \sqrt{ah + h^2} \quad (\text{ponto crítico})$$

Como $a > 0$ e $(x^2 + ah + h^2) > 0$, o sinal de f' é dado pelo sinal de $-x^2 + (ah + h^2)$:



$x = \sqrt{ah + h^2}$ é máximo de $f(x) = \tan \alpha$.
 $\Rightarrow$ Logo, tomando a distância de $x = \sqrt{ah + h^2}$ m, o observador terá o melhor ângulo de visão.

6) Um time de futebol possui um estádio com capacidade para 45.000 pessoas. Com o ingresso custando 40 reais, a média de público tem sido de 25.000 torcedores. Uma pesquisa de mercado indicou que a cada 25 centavos de desconto no ingresso, a média de público aumenta em 200 pessoas. Qual deveria ser o preço do ingresso de forma a maximizar a receita?

A receita é

$$R = \text{preço} \cdot \text{quantidade} = P \cdot Q$$

Considere n o número de vezes que o desconto de 25 centavos foi dado. Daí,

$$P(n) = \underbrace{40}_{\text{fixo}} - n \cdot \frac{1}{4} = 40 - \frac{n}{4} \text{ reais}$$

A quantidade é a média de público mais 200 a cada desconto:

$$Q(n) = 25000 + n \cdot 200 = 25000 + 200n$$

Logo, a receita é:

$$\begin{aligned} R(n) &= \left(40 - \frac{n}{4}\right)(25000 + 200n) = 1.000.000 + 8000n - 6250n - 50n^2 \\ &= 1750n - 50n^2. \end{aligned}$$

Temos que

$$R'(n) = 1750 - 100n$$

O ponto crítico é

$$R'(n) = 0 \Rightarrow 100n = 1750 \Rightarrow n = 17,5$$

Veja que $R''(n) = -100 \Rightarrow R''(17,5) = -100 < 0$.

Logo, $n = 17,5$ é máximo de R .

Dai, o valor do ingresso que maximiza a receita é:

$$P(17,5) = 40 - \frac{17,5}{4} = 40 - 4,375 = 35,625 \text{ reais,}$$

onde o público será:

$$Q(17,5) = 25000 + 17,5 \cdot 200 = 25 + 3500 = 28500$$

e a receita fica em

$$R(17,5) = P(17,5) \cdot Q(17,5)$$

$$= 35,625 \cdot 28500$$

$$= 1.015.312,50 \text{ reais}$$

Na realidade, o valor do ingresso seria arredondado para 35,65 reais.

7) Uma empresa que fabrica guarda-chuvas tem um custo fixo de 2500 reais mais 8 reais por unidade fabricada. A empresa estimou que o preço de venda de cada peça é dado por

$$P(n) = 20 - 0,2\sqrt{n},$$

onde n é o número de peças vendido.

a) Vamos obter a função do lucro:

$$\begin{aligned}\text{Lucro} &= \text{Receita} - \text{Custo} \\ &= \text{Preço} \cdot \text{quantidade} - \text{Custo}\end{aligned}$$

A receita é:

$$R(n) = (20 - 0,2\sqrt{n}) \cdot n = 20n - 0,2n^{3/2}.$$

O custo é

$$C(n) = \underbrace{2500}_{\text{fixo}} + 8 \cdot n$$

Logo, o lucro é

$$\begin{aligned}L(n) &= 20n - 0,2n^{3/2} - 2500 - 8n \\ &= 12n - 0,2n^{3/2} - 2500\end{aligned}$$

b) Quantos guarda-chuvas devem ser fabricados e vendidos para se obter lucro máximo?

Temos

$$L'(n) = 12 - 0,2 \cdot \frac{3}{2} n^{1/2} = 12 - 0,3 \sqrt{n}$$

O ponto crítico é:

$$L'(n) = 0 \Rightarrow 0,3 \sqrt{n} = 12 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{12}{0,3} = \frac{120}{3} = 40$$

$$\Rightarrow n = 40^2 = 1600 \text{ unidades } //$$

Como $L''(n) = -0,3 \frac{1}{2\sqrt{n}} < 0$ (n positivo), pelo TD2ª temos que $n = 1600$ é máximo de L .

c) Qual será o preço de cada guarda-chuva?

$$\begin{aligned} \text{Será } P(1600) &= 20 - 0,2 \sqrt{1600} \\ &= 20 - 0,2 \cdot 40 \\ &= 20 - 8 = 12 \text{ reais} \end{aligned}$$

d) Qual o lucro máximo?

$$\begin{aligned} \text{É } L(1600) &= 12 \cdot 1600 - 0,2 \sqrt{(1600)^3} - 2500 \\ &= 3900 \text{ reais} \end{aligned}$$

8) Em 01 de fevereiro, o preço de venda da saca de milho é 32 reais, após essa data a saca desvaloriza 20 centavos por dia. Em 01/02 um agricultor tem 65 000 sacas colhidas e sua estimativa é que se colha 500 sacas por dia a partir dessa data. Em qual data o agricultor deve vender sua produção para maximizar sua receita?

Seja n o número de dias de colheita após 18/11.

O preço é

$$P(n) = 34 - 0,2 \cdot n \text{ reais}$$

↳ em 01/02

A quantidade é

$$Q(n) = 65000 + 500 \cdot n$$

Daí, a receita é

$$R(n) = P(n) \cdot Q(n) = (34 - 0,2n)(65000 + 500n) = 2.080.000 + 3000n - 100n^2$$

O ponto crítico é dado por

$$R'(n) = 0 \Rightarrow 3000 - 200n = 0 \Rightarrow n = \frac{3000}{200} = 15 \text{ dias}$$

Como $R''(n) = -200 < 0$, temos que $n = 15$ é máximo.

Portanto, após 15 dias, a venda em 16 de fevereiro dará a receita máxima ao agricultor.

2- Esboço de Gráficos

Vamos usar as ferramentas estudadas para esboçar o gráfico de algumas funções.

Existe uma ordem de passos a seguir:

- 1) Determine o domínio
- 2) Determine pontos de intersecção com os eixos.
- 3) Possíveis descontinuidades
- 4) Assíntotas
- 5) Pontos críticos
- 6) Crescimento / decrescimento
- 7) Máximos e mínimos
- 8) Concauidade
- 9) pontos de inflexão

Vejam os alguns exemplos:

a) Considere $f(x) = x^3 + x$.

Vamos seguir os passos:

1) $D(f) = \mathbb{R}$

2) • intersecção com o eixo- x :

$$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(\underbrace{x^2 + 1}_{>0}) = 0 \Rightarrow x = 0 //$$

• Com o eixo- y : $f(0) = 0^3 + 0 = 0 //$

3) f é contínua em $\mathbb{R}$

4) • Horizontais: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow \pm\infty} (\underbrace{x^2 + 1}_{\rightarrow \infty}) = \pm\infty$

Logo, não há assíntotas horizontais.

• Verticais: Como $\lim_{x \rightarrow a} (x^3 + x) = a^3 + a \neq \pm\infty$, temos que f não possui assíntotas verticais.

• Oblíquas:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + 1 = +\infty.$$

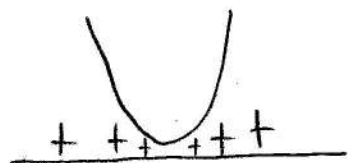
Logo, f não possui assíntotas oblíquas.

5) Se $f'(x) = 0$, então

$$3x^2 + 1 = 0,$$

que não possui solução. Logo, f não possui pontos críticos.

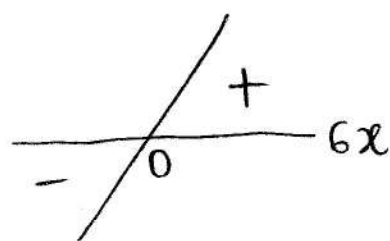
6) O sinal de $f'(x) = 3x^2 + 1$ é



$\Rightarrow f$ é crescente em $D(f) = \mathbb{R}$.

7) Como f é crescente em todo o domínio, não existem máximos e/ou mínimos.

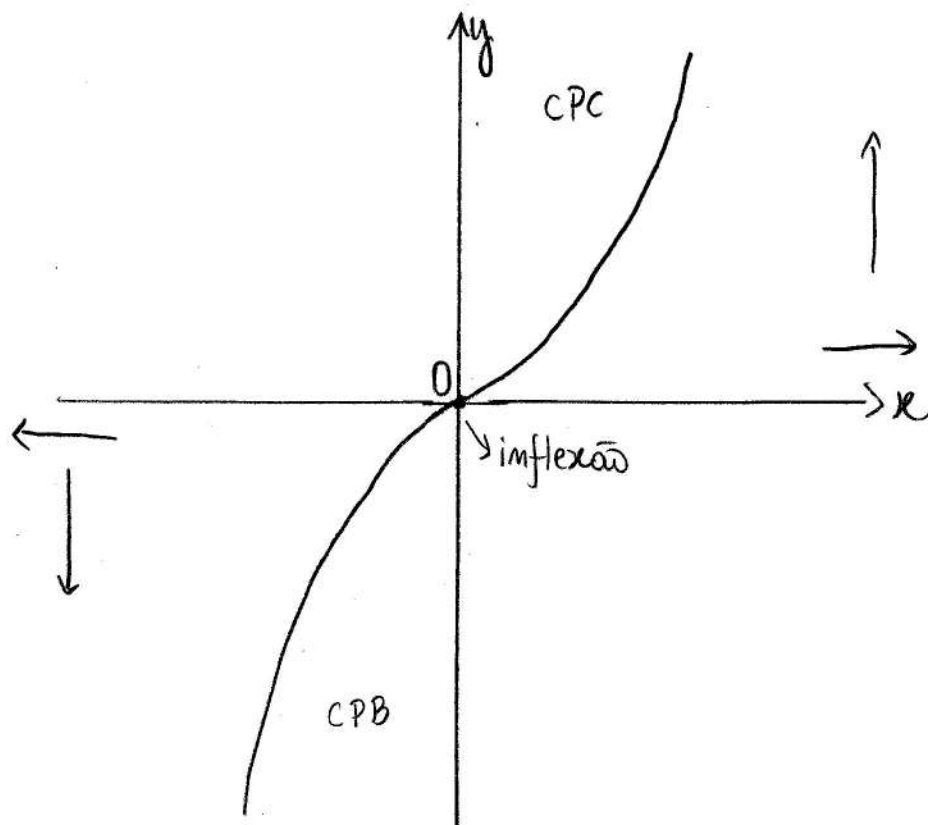
8) Temos $f''(x) = 6x$, cujo sinal é



$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ é CPB em } (0, \infty) \\ f \text{ é CPC em } (-\infty, 0) \end{cases}$

9) Como f'' troca de sinal em $x=0$, temos que $x=0$ é o único ponto de inflexão de f .

Agora, esboçamos o gráfico:



b) Seja $f(x) = x^4 - x^2$

1) $D(f) = \mathbb{R}$

2) • $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 1$.

• $f(0) = 0^4 - 0^2 = 0$

3) f é contínua em $\mathbb{R}$

4) • Horizontais: não há, pois $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 - x^2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2(x^2 - 1) = \infty$.

• Verticais: não há, pois $\lim_{x \rightarrow a} x^4 - x^2 = a^4 - a^2 \neq \pm\infty$.

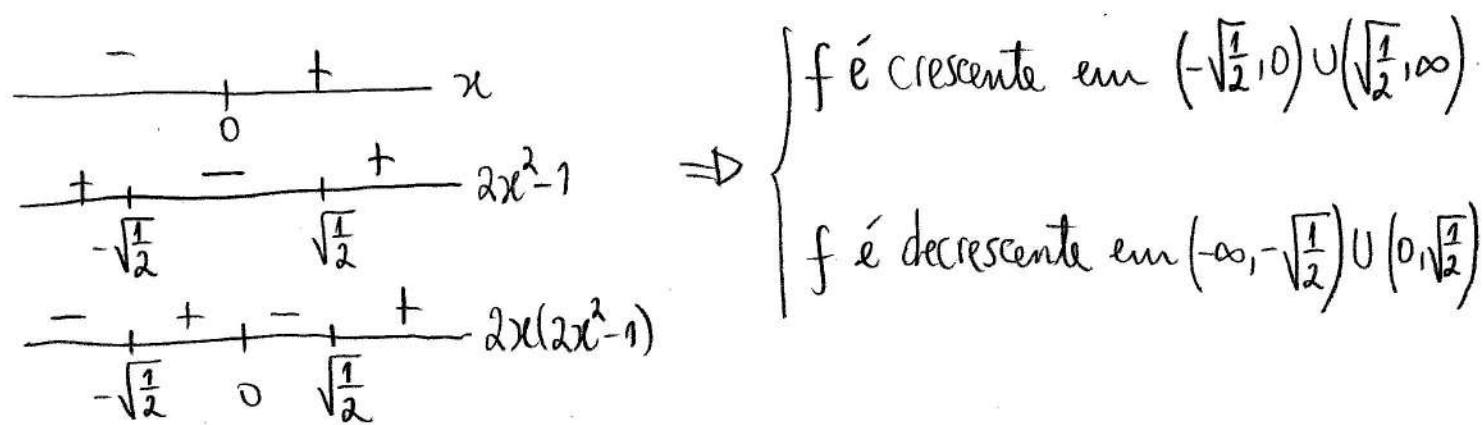
• Obíquas: não há, pois $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(x^2 - 1) = \pm\infty$.

5) Se $f'(x) = 0$, então

$$4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0,7$$

6) O sinal de $f'(x) = 2x(2x^2 - 1)$ é



7) Analisando os sinais acima, pelo TD1ª temos que

- $x = 0$ é máximo
- $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ é mínimo

8) Temos $f''(x) = (4x^3 - 2x)' = 12x^2 - 2 = 2(6x^2 - 1)$.

Pelo exemplo 1, página 257, temos que

- f é CPC em $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{6}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{6}}, \infty)$ e
- f é CPB em $(-\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}})$

9) por 8 termos que os pontos de inflexão são

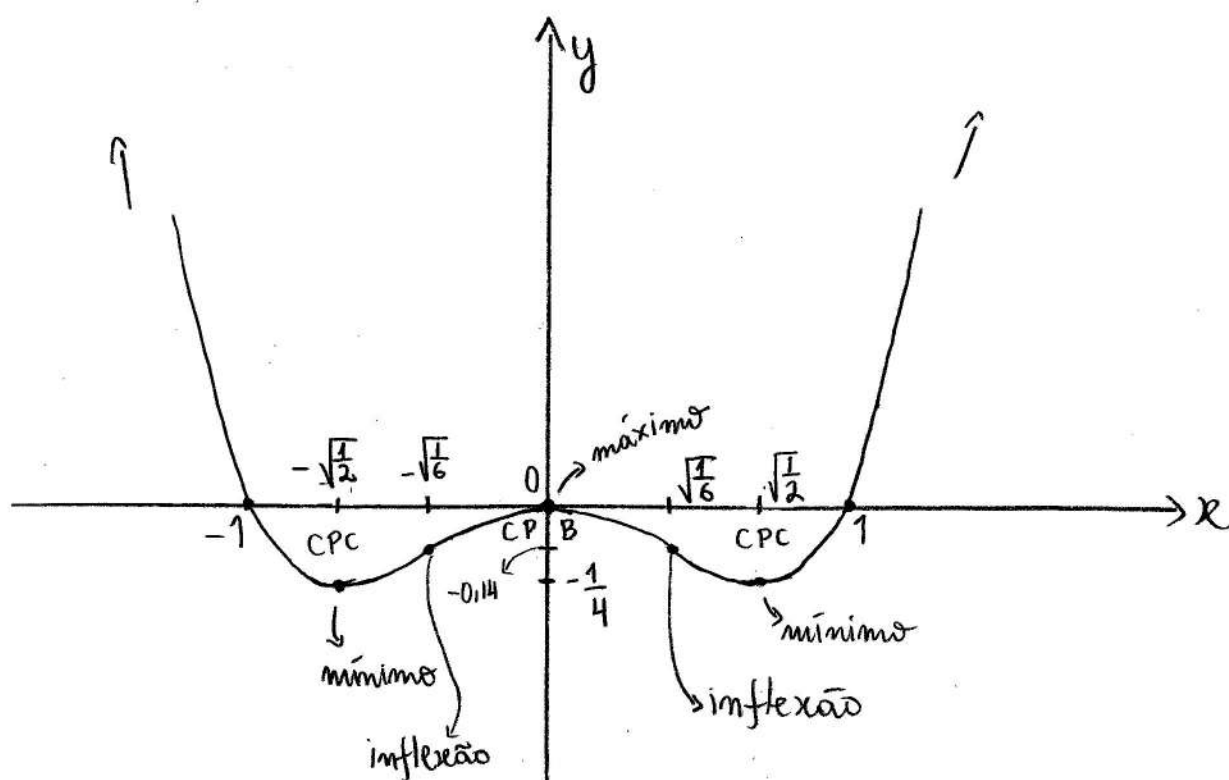
$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{6}} \approx \pm 0,41$$

Com essas informações, vamos esboçar o gráfico:

Antes, veja que

$$\bullet f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

$$\bullet f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^4 - \left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2 = \frac{1}{36} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{36} \approx -0,14$$



c) Considere $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

1) Temos que $D(f) = \mathbb{R}$.

2) • Como $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} > 0$, $\text{Gr}(f)$ não intersecta o eixo- x .

$$\bullet f(0) = \frac{1}{0^2 + 1} = 1$$

3) f é contínua em $\mathbb{R}$.

4) • Horizontais: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \rightarrow 0}{1 + \frac{1}{x^2} \rightarrow 0} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

• Verticais :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{a^2 + 1} \neq \pm\infty \Rightarrow \text{não há assint. verticais.}$$

• Obíquas : não há, pois

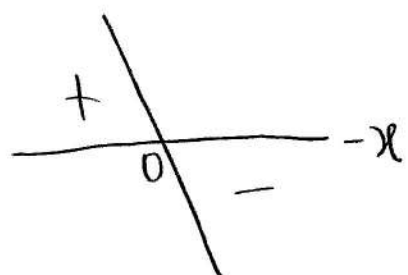
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3+x} = 0.$$

5) Se $f'(x)=0$, então

$$((x^2+1)^{-1})' = 0 \Rightarrow -(x^2+1)^{-2} \cdot (x^2+1)' = 0$$

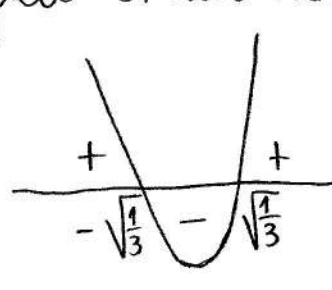
$$\Rightarrow -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x=0 //$$

6) Como $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ e $(x^2+1)^2$, o sinal de f' é


$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ é crescente em } (-\infty, 0) \\ f \text{ é decrescente em } (0, \infty) \end{cases}$$

7) Pelo TD1ª, temos que $x=0$ é máximo.

8) Temos que $f''(x) = 2 \cdot \frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$, o sinal de f'' é dado pelo sinal de $3x^2-1$:

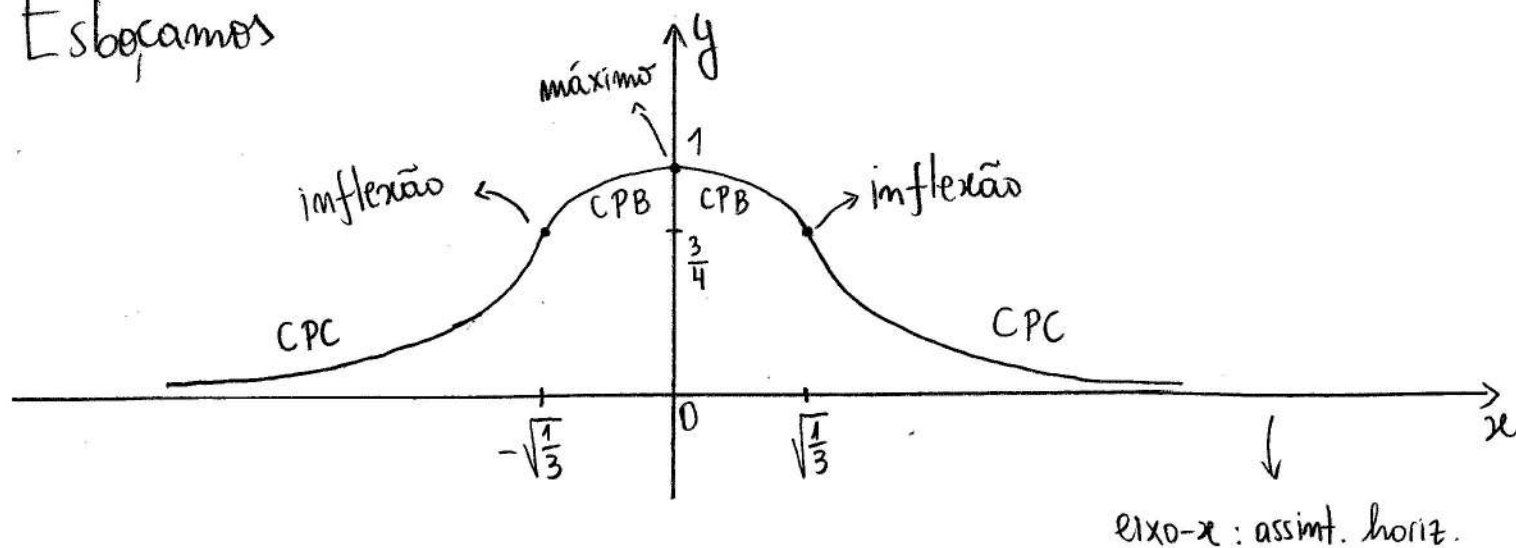

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ é CPC em } (-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty) \\ f \text{ é CPB em } (-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}) \end{cases}$$

9) Por 8), temos que os pontos de inflexão são $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Veja que

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}, \text{ onde } \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,58$$

Esboçamos



d) Seja $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

1) $D(f) = \mathbb{R}$

2) • $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 5) = 0$

$\Rightarrow x = 0 //$ ou $x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \approx 1,8 \text{ e } -2,8$

• $f(0) = 0^3 + 0^2 - 5 \cdot 0 = 0$

3) f é contínua em $\mathbb{R}$

4) Horizontais: não há, pois $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + x^2 - 5x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right) = \pm\infty$.

Verticais: $\lim_{x \rightarrow a} x^3 + x^2 - 5x = a^3 + a^2 - 5a \neq \pm\infty$, não há ass. verticais

-Obíquas: não há, pois

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 - 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + x - 5 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right) = \infty$$

5) Se $f'(x)=0$, então

$$3x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{6} < \frac{1}{-5/3} = -\frac{5}{3} \approx -1,6$$

6) O sinal de $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ é

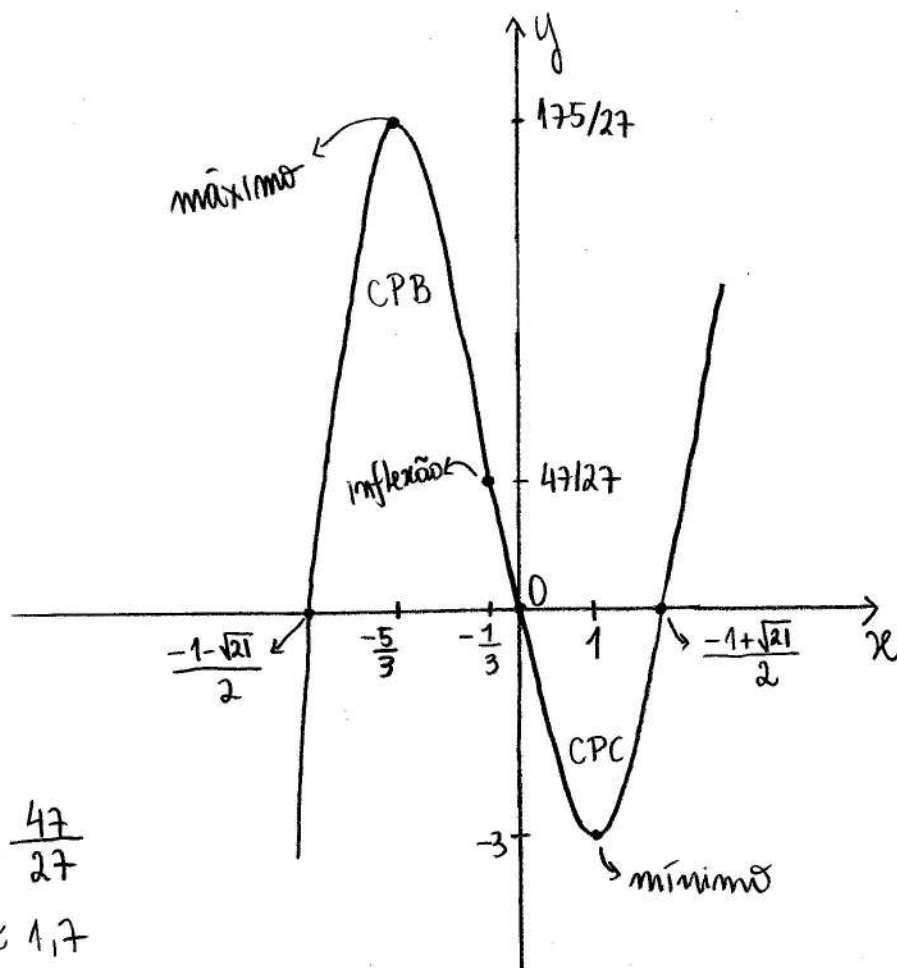
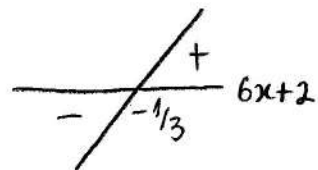


7) Pelo TD 1ª temos que $x = -5/3$ é máximo e $x = 1$ é mínimo

Veja que $f(1) = 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 = -3$ e

$$f(-5/3) = (-5/3)^3 + (-5/3)^2 - 5 \cdot (-5/3) = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{25}{3} = \frac{175}{27} \approx 6,5$$

8) Temos $f''(x) = 6x + 2$, cujo sinal é



$$f(-1/3) = \frac{47}{27} \approx 1,7$$

$\Rightarrow f$ é CPC em $(-1/3, \infty)$

$\Rightarrow f$ é CPB em $(-\infty, -1/3)$

9) Por 8), temos que $x = -1/3$ é o único ponto de inflexão de f .