

Números Complexos

A unidade imaginária é um número não-real definido por

$$\boxed{i^2 = -1}$$

(Não escreva
 $i = \sqrt{-1}$!!!)

Um número complexo é um número da forma

$$\boxed{z = a + bi},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

O conjunto formado por todos os números complexos é denotado por $\mathbb{C}$.

Veja que, fazendo $b = 0$, temos

$$z = a + 0 \cdot i = a \in \mathbb{R}.$$

Isso implica que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Dado $z = a + bi$, definimos:

- a parte real de z é $a = \text{Re}(z)$.
- a parte imaginária de z é $b = \text{Im}(z)$.

Se $a = 0$, então $z = bi$ é dito ser um número imaginário puro.

Os números $a + bi$ e $c + di$ são iguais se
 $a = c$ e $b = d$.

No conjunto dos complexos vale a lei:

- Associativa
- Comutativa
- Distributiva

Obs.: não é possível
usar $<$ ou $>$ para
números complexos

A unidade i apresenta uma periodicidade em
suas potências:

- $i^2 = -1$
- $i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i \Rightarrow \boxed{i^3 = -i}$
- $i^4 = i \cdot i^3 = i \cdot (-i) = -i^2 = -(-1) = 1 \Rightarrow \boxed{i^4 = 1}$

Dessa forma, escrevemos :

$$\bullet i^{4k} = 1 //$$

$$\bullet i^{4k+1} = i //$$

$$\bullet i^{4k+2} = -1 //$$

$$\bullet i^{4k+3} = -i //$$

→ Operações

$$\bullet \text{ Adição : } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i .$$

$$\bullet \text{ Multiplicação : distributiva}$$

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bd i^2 \\ &= ac + (ad+bc)i + bd(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad+bc)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Exemplo: } (2-i)(3+4i) &= 6 + 8i - 3i - 4i^2 \\ &= 6 + 5i + 4 \\ &= 10 + 5i //$$

• Divisão: racionaliza

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} &= \frac{ac-adi+bc i-bd i^2}{c^2-d^2 i^2} \\ &= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i\end{aligned} //$$

Exemplo: $\frac{i+1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2i+3i^2+2+3i}{4-9i^2}$

$$= \frac{-1+5i}{4+9} = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13} i //$$

Definição: Seja $z=a+bi \in \mathbb{C}$. Definimos:

• O conjugado de z por $\bar{z} = a-bi$.

• a norma ou módulo de z por $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$$\begin{aligned}\text{Daí, } |z| &= \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \sqrt{a^2 - b^2 i^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Elemento inverso

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}^*$. Daí,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

Exemplo: $\frac{1}{4+i} = \frac{4-i}{16+1} = \frac{4}{17} - \frac{1}{17}i //$

• Propriedades do conjugado e módulo

$$1) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$2) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$3) \overline{\bar{z}} = z$$

$$4) \frac{\overline{z_1}}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{z_2}$$

$$5) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$6) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$7) \text{DT: } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$8) ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

Veja que para $z = a + bi$ temos

$$\bullet z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$$

$$\bullet z - \bar{z} = a + bi - a + bi = 2bi$$

Daí,

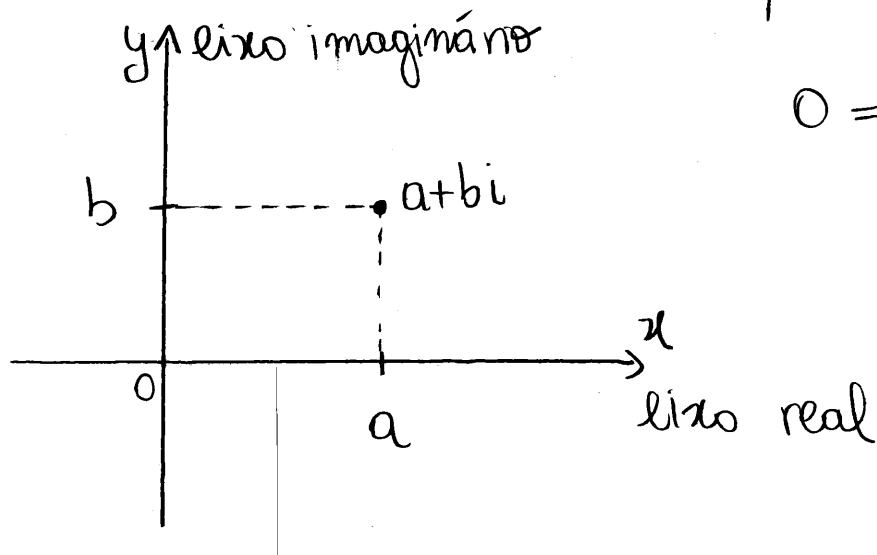
$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}}$$

$$\text{e } \boxed{\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

O plano complexo

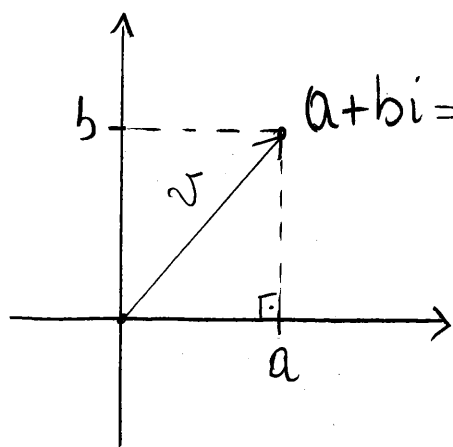
A função $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma bijeção
 $a + bi \longmapsto (a, b)$

entre $\mathbb{C}$ e o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Por esse motivo, representamos os números complexos no plano



$$0 = 0 + 0i$$

A cada número $a+bi$ associamos um vetor



$a+bi=z$ Veja que, de fato,

$$|z|^2 = a^2 + b^2.$$

Considere $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$, a distância entre z_1 e z_2 é:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(a-c) + (b-d)i| \\ &= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} // \end{aligned}$$

Exemplo: a distância d entre $-2-4i$ e $1+3i$ é:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-2-1)^2 + (-4-3)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} // \end{aligned}$$

Forma Polar de um n° Complexo

Já estudamos coordenadas polares:

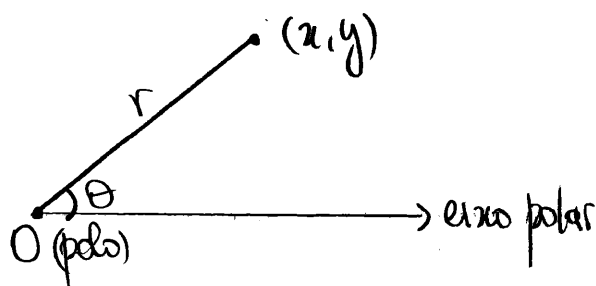
$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta.$$

Daí, escrevemos

$$z = x + yi$$

$$= r \cos \theta + r \sin \theta i$$

$$= r (\cos \theta + i \sin \theta)$$



$$\Rightarrow \boxed{z = r (\cos \theta + i \sin \theta)}$$

Essa é a forma polar de z .

Lembre que r é a distância do ponto (x, y) à O .

Daí,

$$r = |z|$$

Assim, a forma polar fica, com $\text{cis}(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ temos

$$\boxed{z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)} = |z| \text{cis}(\theta)$$

O ângulo θ é chamado de argumento de z :

$$\boxed{\theta = \arg(z)}$$

Lembre que

$$\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = x/|z| \\ \sin \theta = y/|z| \end{cases}$$

ou de maneira concisa: $\boxed{\operatorname{tg} \theta = y/x}$.

Exemplos: Vamos achar a forma polar de

1) $1 + \sqrt{3}i = z$

Temos

$$\bullet |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\bullet \begin{cases} \cos \theta = 1/2 \\ \sin \theta = \sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Daí,

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$2) z = i$$

Temos

$$\bullet |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$\bullet \begin{cases} \cos \theta = 0/1 = 0 \\ \sin \theta = 1/1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Daí, $z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = \text{cis} \left(\frac{\pi}{2} \right)$

$$3) z = -1 + i$$

Temos

$$\bullet |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\bullet \begin{cases} \cos \theta = -1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2 \\ \sin \theta = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos \frac{\pi}{4} \\ = -\cos \left(\pi - \frac{3\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \quad = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = \pm \frac{3\pi}{4}$$

Daí, $\theta = 3\pi/4$ e

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \text{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right)$$

Operações na forma polar

Considere

$$\bullet z_1 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = |z_1| \operatorname{cis}(\theta_1)$$

$$\bullet z_2 = |z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = |z_2| \operatorname{cis}(\theta_2)$$

Daí,

$$1) z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2)$$

$$= |z_1| |z_2| \left(\underbrace{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)}_{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + i \underbrace{(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)}_{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \right)$$

$$= |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Logo,

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))} \quad (*)$$

De maneira análoga, teremos

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))} \quad (**)$$

Em suma :

$$1) z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) //$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = |z_1|/|z_2| \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) //$$

De 1) temos

$$z_1 z_2 = |z_1| \operatorname{cis}(\theta_1) \cdot |z_2| \operatorname{cis}(\theta_2) = |z_1| |z_2| \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{cis}(\theta_1) \operatorname{cis}(\theta_2)}$$

Da mesma forma

$$\boxed{\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{cis}(\theta_1)}{\operatorname{cis}(\theta_2)}}$$

• Potências inteiras de z :

Usando (*) temos

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{|z| \cdots |z|}_{n \text{ vezes}} (\underbrace{\cos(\theta + \cdots + \theta)}_{n \text{ vezes}} + i \underbrace{\operatorname{sen}(\theta + \cdots + \theta)}_{n \text{ vezes}})$$

Daí,

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = |z|^n \operatorname{cis}(n\theta) //$$

Exemplo: Seja $z = -1 + i$. Vamos calcular z^4 :

$$z^4 = |z|^4 (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta))$$

$$= (\sqrt{2})^4 \left(\cos\left(4 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(4 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 4 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi)$$

$$= 4 (-1 + i 0) = -4 //$$

• Elemento inverso

Vamos usar (**). Como $1 = 1 + 0i = \cos 0 + i \sin 0$, temos

$$\frac{1}{z} = \frac{|1|}{|z|} (\cos(0 - \theta) + i \sin(0 - \theta))$$

$$= \frac{1}{|z|} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{|z|} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{z^{-1} = |z|^{-1} (\cos \theta - i \sin \theta) = |z|^{-1} \overline{\operatorname{cis}(\theta)}}$$

Fórmula de Moivre

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}$$

ou

$$\boxed{(\operatorname{cis}(\theta))^n = \operatorname{cis}(n\theta)}$$

Raízes

Definição: Dizemos que w é raiz n -ésima de $z \in \mathbb{C}$ se $w^n = z$.

Vamos supor que

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ e } w = |w| (\cos \phi + i \sin \phi)$$

Temos

$$\begin{aligned} w^n &= (|w| (\cos \phi + i \sin \phi))^n = |w|^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) \\ &= z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |w|^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \cos \theta + i \sin \theta = \cos(n\phi) + i \sin(n\phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \cos(n\phi) \\ \sin \theta = \sin(n\phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow n\phi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

Quando fazemos $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, obtemos as raízes n -ésimas de z . Se $k \geq n$, temos

$$\phi = \frac{\theta + 2 \cdot n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi = \frac{\theta}{n} \quad (k=n)$$

Portanto, as raízes n -ésimas de $z \in \mathbb{C}$ são:

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)}$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 //$$

Exemplo: Obter as raízes cúbicas de $z = i$

Temos $z = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ e $n=3$.

Daí,

$$\bullet \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{(4k+1)\pi}{6} \quad \text{e} \quad \bullet \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Logo,

$$\rightarrow w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i //$$

$$\rightarrow w_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i //$$

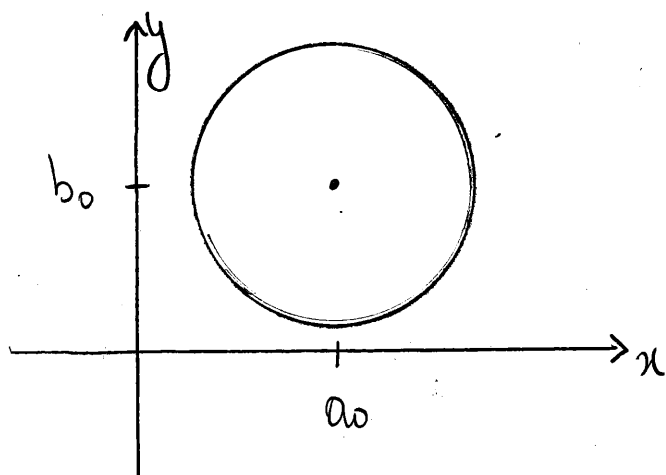
$$\rightarrow w_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i //$$

Conjuntos no plano Complexo

Considere $z_0 = a_0 + b_0 i \in \mathbb{C}$. Vamos analisar o conjunto de pontos $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z - z_0| = R.$$

Esse conjunto é formado por todo $z \in \mathbb{C}$ que dista R de z_0 . Isso configura uma circunferência centrada em z_0 e com raio medindo R .

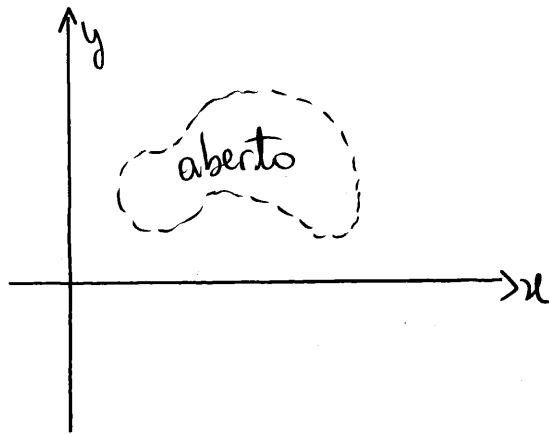


A equação de uma circunferência centrada em $0 \in \mathbb{C}$ é

$$\boxed{|z| = R},$$

onde R é a medida do raio.

Definição: Um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ é aquele que não contém a borda.



- Disco aberto

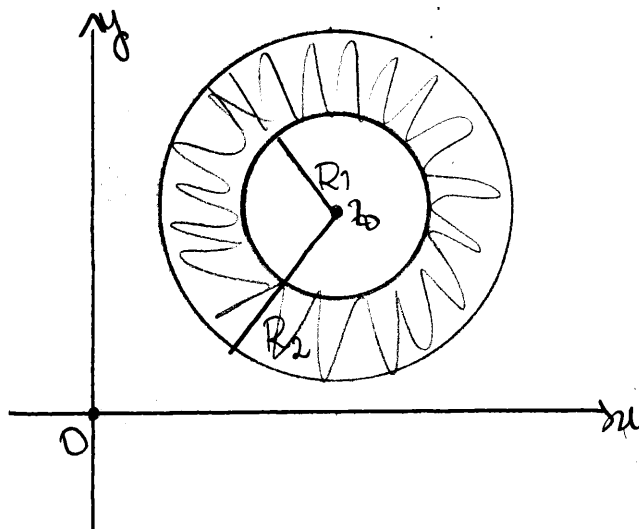
$$|z - z_0| < R.$$

- Disco fechado

$$|z - z_0| \leq R.$$

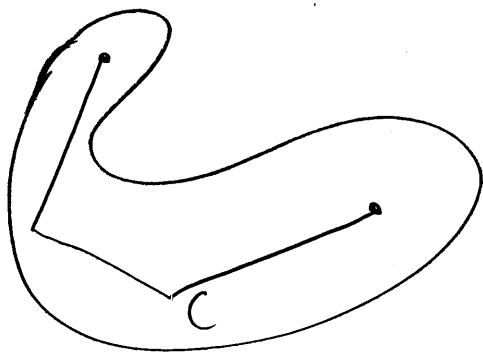
Um anel circular tem equação

$$R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$$

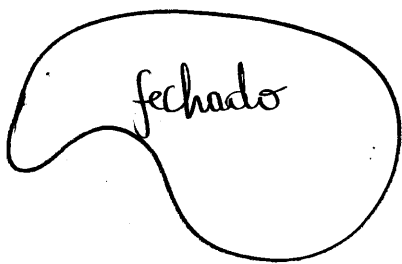


Definição: Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é dito ser

- Conexo, se podemos obter um caminho em A que conecte quaisquer dois pontos dados.



- limitado, se $|z| < R$, $R > 0$.
- fechado, se inclui a borda.



- domínio, se A for aberto e conexo



Exemplo: o conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-3| < 4\}$$

é um anel circular aberto centrado em $3 = 3+0i$.

Veja que A também é conexo, o que o torna um domínio. Veja que

$$||z|-3| < |z-3| < 4 \Rightarrow ||z|-3| < 4$$

$$\Rightarrow -4 < |z|-3 < 4 \Rightarrow |z| < 7$$

$\Rightarrow A$ é limitado.

Aplicação: Equação do 2º grau

Considere $\Delta < 0$. Vamos considerar as raízes quadradas de Δ : w_0 e w_1

Como $\Delta = |\Delta| (\cos \pi + i \sin \pi)$, temos

$$\bullet w_0 = \sqrt{|\Delta|} \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} \right) = \sqrt{|\Delta|} \cdot i$$

$$\bullet w_1 = \sqrt{|\Delta|} \left(\cos \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right) = -\sqrt{|\Delta|} i$$

$\underbrace{\quad}_{=0} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{=-1}$

Dai, as soluções são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|} i}{2a} \Rightarrow \frac{-b + \sqrt{|\Delta|} i}{2a} \text{ e seu conjugado}$$

são soluções

Exemplo: Vamos resolver $x^2 + 4x + 5 = 0$

Temos $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$

Dai,

$$x = \frac{-4 \pm \overset{\sqrt{4}}{\sqrt{1-4}} i}{2 \cdot 1} \begin{cases} -2 + i \\ -2 - i \end{cases} \text{ são soluções.}$$

A fórmula continua válida quando os coeficientes da equação estão em $\mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{-b \pm \Delta^{1/2}}{2a}}, \text{ onde}$$

$\Delta^{1/2}$ simboliza as raízes quadradas de Δ .

Exemplos: Vamos resolver $z^2 + (1-i)z - 3i = 0$.

Temos $a=1$, $b=1-i$ e $c=-3i$.

Vamos achar o Δ :

$$\Delta = (1-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3i)$$

$$= 1 - 2i + 12i = 10i = 10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} \cdot |10i| = 10 \\ \cdot \cos\theta = 0 \\ \cdot \sin\theta = 1 \\ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Suas raízes quadradas são:

$$\bullet W_0 = \sqrt{10} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} \right)$$

$$= \sqrt{10} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{10} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{5} + \sqrt{5}i //$$

$$\bullet W_1 = \sqrt{10} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right)$$

$$= \sqrt{10} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{10} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i //$$

Dai, as soluções são

$$z = \frac{i-1 \pm w_k}{2 \cdot 1}, \quad k = 0, 1$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{i-1 + \sqrt{5} + \sqrt{5}i}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}i //$$

ou

$$z_2 = \frac{i-1 - \sqrt{5} - \sqrt{5}i}{2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}i //$$