Notas de aula
Análise no $\mathbb{R}^n$

Alexandre Fernandes
e
Edson Sampaio

Sumário

1 O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e Invariantes topológicos básicos 3

2 Abertos e fechados 9

3 Compacidade e continuidade uniforme 13

4 Teorema do Valor Intermediário 17

5 Caminhos em $\mathbb{R}^n$ 21

6 O Teorema do Valor médio para caminhos 25

7 Aplicações diferenciáveis 29

8 Teorema da Aplicação Inversa 33

9 Forma Local das Submersões e Imersões 37

10 Lema de Morse e Teorema da Aplicação Implícita 39

11 Superfícies de classe C^k 43

12 Conjuntos no $\mathbb{R}^n$ de medida nula 45

13 Teorema de Sard 49

14 Funções integráveis e o Teorema de Lebesgue 53

15 Conjuntos Jordan Mensuráveis 59

16 Mudança de variáveis 63

17 69

18 71

19 73

20 75

21 77

22 **81**

23 **83**

24 **85**

1. O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e Invariantes topológicos básicos

Ao longo deste texto, trabalharemos com o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ equipado com uma função distância proveniente de uma norma.

Definição 1.1. *Uma função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita uma norma se:*

(i) *ϕ é não negativa e $\phi(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$; (positivo-definida)*

(ii) *$\phi(tx) = |t|\phi(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$; (homogeneidade)*

(iii) *$\phi(x + y) \leq \phi(x) + \phi(y)$. (Subaditividade)*

Exemplo 1.2. *São exemplos de normas em $\mathbb{R}^n$:*

(a) *Norma euclidiana: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|(x_1, ..., x_n)\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$;*

(b) *Norma do máximo: $\|\cdot\|_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|(x_1, ..., x_n)\|_M = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$;*

(c) *Norma da soma: $\|\cdot\|_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|(x_1, ..., x_n)\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.*

Duas normas ϕ_1 e ϕ_2 são ditas equivalentes se existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $\phi_1(x) \leq C_2\phi_2(x)$ e $\phi_2(x) \leq C_1\phi_1(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Obs. Veremos em um futuro breve que todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e (x_k) um sequência em X. Dixemos que (x_k) converge para $x \in \mathbb{R}^n$, se para todo $\varepsilon > 0$ existem N_0 tal que para todo $k \geq N_0$ tem-se $\|x_k - x\| < \varepsilon$. Neste caso, escrevemos $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ ou $x_k \to x$.

Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é dita *contínua* no ponto $x \in X$ se para toda seqüência de pontos (x_k) em X com $x_k \to x$, tem-se $f(x_k) \to f(x)$. Quando f é contínua em todos os pontos de X dizemos que f é *contínua*.

Vale observar que $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é dada por $f = (f_1, \ldots, f_p)$ em que $f_1, \ldots, f_p : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e, a continuidade de f em $x \in X$ é equivalente à continuidade das funções $f_1, \ldots, f_p$ em $x \in X$.

Exemplo 1.3. *As restrições de aplicações polinomiais $X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ são contínuas. De fato, as aplicações racionais $X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ são contínuas.*

Proposição 1.4. *A composta de aplicações contínuas ainda é uma aplicação contínua.*

Demonstração. Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua em $x \in X$, $g : Y \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ contínua em $y = f(x)$, tais que $f(X) \subset Y$. Vamos mostrar que $g \circ f : X \to \mathbb{R}^k$ é contínua em x. De fato, seja $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim x_j = x$. Então, pela continuidade de f, temos $\lim f(x_j) = f(x)$ e pela continuidade de g, temos $\lim g(f(x_j)) = g(f(x))$, ou seja, $\lim(g \circ f)(x_j) = (g \circ f)(x)$. □

Definição 1.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^p$. Uma aplicação contínua $f\colon X \to Y$ é dita um* homeomorfismo *quando é uma bijeção com inversa contínua. Quando existe um homeomorfismo $f\colon X \to Y$ dizemos que X é* homeomorfo *a Y.*

Abaixo apresentamos alguns exemplos de conjuntos homeomorfos:

Exemplo 1.6. **(a)** *As bolas abertas $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|y - x\| < r\}$ em $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.*

(b) *Os cubos abertos em $\mathbb{R}^n$, $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ são homeomorfos a $\mathbb{R}^n$.*

(c) *Seja $p \in S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ \|x\| = 1\}$. Então, $S^n - \{p\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

(d) *O cilindro $S^n \times (0, +\infty)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.*

Demonstração. (a) Seja $f\colon B(0, 1) \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}.$$

Temos que f é uma bijeção contínua (pois é racional) com inversa $g\colon \mathbb{R}^n \to B(0, 1)$ dada por

$$g(y) = \frac{y}{1 + \|y\|}$$

contínua (pois quociente de funções contínuasl), ou seja, f é um homeomorfismo. Agora o resultado segue do fato que $T\colon B(x, r) \to B(0, 1)$ dada por $T(z) = rz - x$ é claramente um homemorfismo.

(b) Para cada $i = 1, ..., n$, considere o homeomorfismo $g_i : (-1, 1) \to (a_i, b_i)$ dado por $g_i(t) = \frac{1}{2}[(b_i - a_i)t + (a_i + b_i)]$. Pelo item a), existe homeomorfismo $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Assim, defina $g : I \to \mathbb{R}^n$ por $g(x_1, ..., x_n) = (f \circ g_1^{-1}(x_1), ..., f \circ g_n^{-1}(x_n))$. É fácil ver que g é um homeomorfismo.

(c) Seja $N = (0, ..0, 1)$. Fazendo uma rotação, se necessário, podemos supor que $p = N$. Então a aplicação $\pi_N : S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\pi_N(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, ..., x_n)$$

é homeomorfismo com inversa dada por

$$\pi_N^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}(2y, \|y\|^2 - 1).$$

(d) Basta observar que $\rho : S^n \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dada por $\rho(x, t) = tx$ é um homeomorfismo com inversa $\rho^{-1}(y) = (\frac{y}{\|y\|}, \|y\|)$. □

Proposição 1.7. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dada uma aplicação contínua $f\colon X \to \mathbb{R}^p$ o gráfico de f é homeomorfo a X.*

Demonstração. Exercício. □

Seja $\mathcal{S} = \{X\ : X \subset \mathbb{R}^n \text{ para algum } n\}$. Uma propriedade P sobre os elementos de $\mathcal{S}$ é dita um *invariante topológico* quando dado $X \in \mathcal{S}$, tem-se que $P(X)$ é verdadeira se, e somente se, $P(Y)$ é verdadeira para todo $Y \in \mathcal{S}$ homeomorfo a X.

Exemplo 1.8 (Contra-exemplo)**.** *S^n não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Em $\mathbb{R}^n$ existe seq. de pontos que não possui subseq. convergente. Por outro lado, é fácil ver que toda seq. de pontos em S^n possui uma subseq. convergente. □

$X \subset \mathbb{R}^n$ tal que toda seq. de pontos em X possui uma subseq. que converge para um ponto de X é dito *compacto.*

Proposição 1.9. *Compacidade é um invariante topológico.*

Demonstração. Exercício. □

Exemplo 1.10. *S^n é compacto.*

Demonstração. Seja $\{x_k\} \subset S^n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever $x_k = (x_{1,k}, ..., x_{n+1,k})$. Agora, a sequência $\{x_{1,k}\}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Logo, existe $N_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\{x_{1,k}\}_{k\in N_1}$ é convergente em $\mathbb{R}$, assim como existe $N_2 \subset N_1$ infinito tal que $\{x_{2,k}\}_{k\in N_2}$ é convergente em $\mathbb{R}$. Prosseguindo com este argumento, obtemos $n + 1$ subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, digamos

$$N_1 \supset N_2 \supset ... \supset N_n \supset N_{n+1},$$

tais que $\{x_{i,k}\}_{k\in N_i}$ é convergente em $\mathbb{R}$, para $i = 1, ..., n + 1$. Logo, $\{x_k\}_{k\in N_{n+1}}$ é converge para algum ponto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Como $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ é contínua e $\|x_k\| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $\|x\| = 1$, mostrando que $x \in S^n$ e pela arbitrariedade da sequência $\{x_k\} \subset S^n$, S^n é compacto. □

Abaixo, vemos um exemplo de dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não compactos, os quais não são homeomorfos.

Exemplo 1.11. *$\mathbb{R}$ não é homeomorfo a $\mathbb{R} - \{0\}$.*

Demonstração. $sgn\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \{-1, 1\}$ dada por $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$ é uma função contínua e não constante. Por outro lado, pelo Teorema do Valor Intermediário, toda função contínua $\mathbb{R} \to \{-1, 1\}$ é constante. Segue que os espaços em questão não são homeomorfos. □

Definição 1.12. $X \subset \mathbb{R}^n$. *Se as únicas funções contínuas $X \to \{-1, 1\}$ são as funções constantes, dizemos que X é* conexo.

Proposição 1.13. *Conexidade é um invariante topológico.*

Demonstração. Exercício. □

Exemplo 1.14. (a) *$\mathbb{R}^n$ é conexo. Portanto $S^n - \{p\}$ é conexo para todo $p \in S^n$.*

(b) *S^n é conexo.*

Demonstração. (a) Primeiro observe que $\mathbb{R}$ é conexo e pelo exercício **??** da lista **??**, temos que $\mathbb{R}^n$ é conexo. Portanto, $S^n - \{p\}$ também é conexo, já que este é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

(b) Seja $f\colon S^n \to \{-1, 1\}$ uma função contínua. Sejam p e q pontos distintos de S^n. Dado $x \in S^n - \{p, q\}$, como f é constante em $S^n - \{p\}$ (pois este conjunto é conexo), temos que $f(x) = f(q)$. Como f é constante em $S^n - \{q\}$, temos que $f(x) = f(p)$. Logo, f é constante. □

Existe uma prova (devida a Tiago C. Ribeiro) de que $\mathbb{R}^n$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{0\}$ recorrendo somente aos dois invariantes topológicos definidos acima.

Definição 1.15 (Superfícies Topológicas)**.** *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito uma* superfície topológica de dimensão $m \in \mathbb{N}$ *se para cada $x \in X$ existem um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ contendo x tal que A é uma união de bolas abertas e um homeomorfismo $\varphi : B(0, r) \subset \mathbb{R}^m \to X \cap A$, para algum $r > 0$.*

Exemplo 1.16. (a) *Todo $X \subset \mathbb{R}^n$ subespaço afim de dimensão m é uma superfície topológica de dimensão m.*

(b) *$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma superfície topológica de dimensão n*

(c) *Se $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $X_2 \subset \mathbb{R}^p$ são superfícies topológicas de dimensões m_1 e m_2 respectivamente, então $X_1 \times X_2$ é uma superfície topológica de dimensão $m_1 + m_2$.*

□

Exemplo 1.17 (Contra-exemplo)**.** *O cone $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = z^2\}$ não é uma superfície topológica.*

Demonstração. Exercício. □

Resultados de Topologia que vamos enunciar sem prova são os seguintes teoremas:

Teorema 1.18. *A dimensão de uma superfície topológica está bem definida e é um invariante topológico.*

Teorema 1.19. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície topológica, conexa e de dimensão 1. Então X é homeomorfa a $\mathbb{R}$ ou a S^1.*

O teorema acima, conhecido como Teorema de Classificação das "Variedades"de dimensão 1, em particular, afirma que a única (a menos de homeomorfismo) superfície topológica de dimensão 1, conexa e compacta é S^1. Abaixo, vemos um exemplo em dimensão 2 o qual mostra que compacidade e conexidade não bastam para classificar tais superfícies.

Exemplo 1.20. *S^2 não é homeomorfo a $S^1 \times S^1$.*

A seguir, daremos uma idéia da obstrução que impede S^2 ser homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

Seja $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leqslant 1\}$. Portanto $S^1 \subset D$ e podemos escrever $D = \{tx \ : \ x \in S^1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Definição 1.21. *Um subconjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito* simplesmente conexo *quando toda função contínua $S^1 \to X$ possui uma extensão contínua $D \to X$.*

Proposição 1.22. *Conexidade simples é um invariante topológico.*

Exemplo 1.23. **(a)** $\mathbb{R}^n$ *é simplesmente conexo.*

(b) S^2 *é simplesmente conexo.*

Demonstração. (a) Já sabemos que $\mathbb{R}^n$ é conexo. Agora, seja $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^n$ contínua e seja $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(tx) = tf(x)$; $x \in S^1$ e $0 \leqslant t \leqslant 1$. Claramente, F é uma extensão contínua de f para o disco D.

(b) Já sabemos que S^2 é conexo. Agora, primeiramente, observamos que S^2 menos um ponto é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ e, portanto, é simplesmente conexo. Logo toda função contínua $S^1 \to S^2$, que não é sobrejetora, possui uma extensão contínua para o disco D. Seja $f\colon S^1 \to S^2$ uma função contínua. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe $p\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação polinomial tal que $\|p(x) - f(x)\| < \epsilon$, em que ϵ é um número real positivo suficientemente pequeno (por exemplo $0,01$). Sendo assim, recebemos que $p(x) \neq 0$ para todo $x \in S^1$ e, portanto, temos

$$h\colon S^1 \to S^2$$

dada por

$$h(x) = \frac{p(x)}{\|p(x)\|}$$

bem definida.

`Afirmação.` h não é sobrejetora.

`Prova da Afirmação.` $p = (p_1, p_2, p_3)$ em que p_1, p_2, p_3 são polinômios em duas variáveis ($x = (x_1, x_2)$). Se ocorre a divisão polinomial abaixo

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 | p_1(x_1, x_2)$$

então $p(x) = (0, p_2(x), p_3(x))$ para todo $x \in S^1$ e, portanto, o ponto $(1, 0, 0) \in S^2$ não está na imagem de h. Por outro lado, se não ocorre a divisão polinomial acima, temos que os polinômios $x_1^2 + x_2^2 - 1$ e $p_1(x_1, x_2)$ são primos entre si e, pelo Teorema de Bezout, a equação

$$p_1(x_1, x_2) = 0$$

possui um número finito de soluções sobre S^1, isto é, o conjunto dos pontos da imagem de h que estão no plano horizontal $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ é finito. Isto conclui que existe algum ponto em $S^2 \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^2)$ que não está na imagem de h.

`Final da Prova da Afirmação.`

Lançando mão da afirmação acima, seja $H\colon D \to S^2$ uma extensão contínua de h para o disco D. Por um momento, admitamos que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n(1-t)H(tx) + tf(x) \neq 0$$

para todo $x \in S^1$ e $0 \leqslant t \leqslant 1$. Nesse caso, a aplicação $D\colon \to S^2$ definida por

$$tx \mapsto \frac{n(1-t)H(tx) + tf(x)}{\|n(1-t)H(tx) + tf(x)\|}$$

é, claramente, uma extensão contínua de f.

Para finalizar, mostremos a existência de um tal $n \in \mathbb{N}$. Para tanto, se não existisse um tal número natural, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiriam $x_n \in S^1$ e $0 \leqslant t_n \leqslant 1$ tais que

$$n(1 - t_n)H(t_n x_n) = -t_n f(x_n).$$

Como $\|H(t_n x_n)\| = 1 = \|f(x_n)\|$, temos e

$$n(1 - t_n) = t_n \text{ e } H(t_n x_n) = -f(x_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora $t_n \to 1$ e a menos de subseq. $x_n \to x$ com $x \in S^1$ (por copmpacidade de S^1). Pela continuidade de H e f e por $H(t_n x_n) = -f(x_n)$, recebemos que $H(x) = -f(x)$, isto é, $h(x) = -f(x)$. O que é um absurdo, pois

$$\|h(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} < 2.$$

□

Proposição 1.24. *$X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^p$ são simplesmente conexos se, e somente se, $X \times Y$ é simplesmente conexo.*

Demonstração. Exercício □

Exemplo 1.25 (Contra-Exemplo). *S^1 não é simplesmente conexo.*

Corolário 1.26. *As superfícies topológicas S^2 e $S^1 \times S^1$ não são homeomorfas.*

A respeito das superfícies compactas de dimensão 2, existe um belíssimo teorema de classificação que, dentre outras informações, diz:

Teorema 1.27. *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície topológica de dimensão 2, compacta e simplesmente conexa, então X é homeomorfo à esfera S^2.*

Conjectura de Poincaré [Teorema de Perelman]. *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície topológica de dimensão 3, compacta e simplesmente conexa, então X é homeomorfa à esfera S^3.*

2. Abertos e fechados

Definição 2.1. *Um subconjunto* $F \subset \mathbb{R}^n$ *é dito um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$ *se todo limite de seq. de pontos em* F *necessariamente está em* F.

Exemplo 2.2. *Para todo* $a \in \mathbb{R}^n$ *e todo* $\epsilon > 0$ *a bola* $B[a,\epsilon] := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| \leqslant \epsilon\}$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Exemplo 2.3. $\mathbb{Q}^n$ *e* $\mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ *não são subconjuntos fechados de* $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Exemplo 2.4. $\mathbb{Z}^n$ *e* $\mathbb{N}^n$ *são subconjuntos fechados de* $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Abaixo, seguem algumas observações estruturais:

Proposição 2.5. **(a)** $\mathbb{R}^n$ *e* $\varnothing$ *são subconjuntos fechados de* $\mathbb{R}^n$;

(b) F_1 *e* F_2 *subconjuntos fechados de* $\mathbb{R}^n \Rightarrow F_1 \cup F_2$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$;

(c) F_i *subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Proposição 2.6 (Definição de fecho)**.** *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^n$ *e* $\mathcal{F}(X) = \{F \subset \mathbb{R}^n \ : \ F$ *é fechado e* $X \subset F\}$. *Então,* $\overline{X} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(X)} F$ *satisfaz:*

(i) $\overline{X}$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$;

(ii) $X \subset \overline{X}$;

(iii) $X \subset F$ *e* $F \subset \mathbb{R}^n$ *fechado* $\Rightarrow \overline{X} \subset F$.

$\square$

$\therefore$ $\overline{X}$ definido como acima pode ser interpretado como o menor (com respeito à inclusão de conjuntos) subcojunto fechado de $\mathbb{R}^n$ que contém X.

Por exemplo, dada (x_k) uma seq. de pontos em $\mathbb{R}^n$; $x_n \to a$, se $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, então $\overline{X} = X \cup \{a\}$.

Proposição 2.7. *Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$, então $\overline{Y} \subset \overline{X}$.*

$\square$

Proposição 2.8. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são mutuamente equivalentes:*

(a) $a \in \overline{X}$;

(b) $B(a, \epsilon) \cap X \neq \varnothing$ *para todo* $\epsilon > 0$;

(c) *Existe uma seq.* (x_k) *de pontos em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $x_k \to a$ *e* $x_k \in X$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. ((a) $\Rightarrow$ (b)) Suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \cap X = \varnothing$, isto é, $X \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \geqslant \epsilon\}$. Como $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \geqslant \epsilon\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, $\overline{X} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \geqslant \epsilon\}$. Logo $a \notin \overline{X}$.

((b) $\Rightarrow$ (c)) Suponhamos que $B(a, \epsilon) \cap X \neq \varnothing$ para todo $\epsilon > 0$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in B(a, \frac{1}{k}) \cap X$, isto é, existe um seq. de pontos (x_k) em X tal que $x_k \to a$.

((c) $\Rightarrow$ (a)) Suponhamos que exista uma seq. de pontos (x_k) em X tal que $x_k \to a$ e seja $Y = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$. Desde que $Y \subset X$, pelo que observamos acima, $\overline{Y} \subset \overline{X}$. Por outro lado, sabemos que $a \in \overline{Y}$. $\square$

Definição 2.9. *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto quando o seu complementar $\mathbb{R}^n - A$ é fechado.*

Exemplo 2.10. *Para cada $a \in \mathbb{R}^n$ a bola $B(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \epsilon\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.*

A respeito de conjuntos abertos temos as seguintes propriedades estruturais:

Proposição 2.11. **(a)** $\mathbb{R}^n$ *e* $\varnothing$ *são subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}^n$*;*

(b) A_1 *e* A_2 *subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}^n \Rightarrow A_1 \cap A_2$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$*;*

(c) A_i *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *para todo* $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Proposição 2.12 (Definição de interior)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $I = \{A \subset \mathbb{R} : A$ é aberto e $A \subset X\}$. Então, $int(X) = \displaystyle\bigcup_{A \in I} A$ satisfaz:*

(i) $int(X)$ *é aberto;*

(ii) $int(X) \subset X$;

(iii) $A \subset X$ *e* A *aberto* $\Rightarrow A \subset int(X)$.

$\square$

$\therefore$ $int(X)$ definido como acima pode ser interpretado como o maior (com respeito à inclusão de conjuntos) subcojunto aberto de $\mathbb{R}$ que está contido em X.

Proposição 2.13. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são mutuamente equivalentes:*

(a) *$a \in int(X)$;*

(b) *existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subset X$;*

(c) *para toda seq. de pontos (x_k) em $\mathbb{R}^n$ tal que $x_k \to a$ tem-se $x_k \in X$ para todo k suficientemente grande.*

$\square$

Vale observar que negar que um conjunto é aberto não significa dizer que este conjunto é fechado assim como negar que um conjunto é fechado não significa dizer que este conjunto é aberto. Vale o seguinte:

Proposição 2.14. *Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\mathbb{R}^n$ e $\varnothing$.*

$\square$

3. Compacidade e continuidade uniforme

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $Y \subset X$ é *denso em* X, se $X \subset \overline{Y}$.

Exemplo 3.1. **(a)** *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$;*

(b) *$\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$;*

$\square$

Proposição 3.2. *Sejam $X, Y, Z \subset \mathbb{R}^n$. Se Y é denso em X e X é denso Z, então Y é denso em Z.*

$\square$

Teorema 3.3 (Teorema de Lindelöf). *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Se $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ é aberto para todo $\lambda \in L$, então existe $E \subset L$ enumerável tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in E} A_\lambda$.*

Demonstração. É suficiente provarmos no caso em que X é aberto (verifique)! Sejam $Q = X \cap \mathbb{Q}^n$ e $\mathcal{I}$ o subconjunto de $Q \times \mathbb{Q}$ formado pelos pares (q, r) tais que a bola $B(q, r)$ está contida em A_λ para algum $\lambda \in L$.

`Afirmação.` $X \subset \bigcup_{(q,r) \in \mathcal{I}} B(q, r)$.

Com efeito, dado $x \in X$, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$B(x, 2r) \subset A_\lambda.$$

Por outro lado, como Q é denso em X, existe $q \in Q$ tal que $\|q - x\| < r$. Assim, $x \in B(q, r) \subset B(x, 2r) \subset A_\lambda$. Portanto, fica provada a afirmação.

De volta, seja $(q_1, r_1), \ldots, (q_n, r_n), \ldots$ uma enumeração de $\mathcal{I}$. Para cada natural n existe um $\lambda_n \in L$ tal que $B(q_n, r_n) \subset A_{\lambda_n}$. Juntando essa última conclusão com o que foi afirmado e provado acima, recebemos

$$X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(q_n, r_n) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\lambda_n}.$$

$\square$

Relembrando, um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito *compacto* quando toda seq. de pontos em X possui uma subseq. que converge para um ponto de X.

Exemplo. $B[a, \epsilon] \subset \mathbb{R}^n$; é um subconjunto compacto.

Exemplo. A reunião finita de conjuntos compactos ainda é compacto, em particular, todo conjunto finito é compacto.

Proposição 3.4. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração. Seja X limitado e fechado. Então toda seq. de pontos de X é limitada e, portanto, possui uma subseq. convergente, cujo limite está em X pois X é fechado. Reciprocamente, se X não é limitado, existe $x_k \in X$ tal que $\|x_k\| > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e (x_k) assim construída não possui subseq. convergente. Também, se X não é fechado, então existe uma seq. (y_k) em X tal que $y_k \to a \notin X$ e, portanto, toda subseq. de (y_k) converge para $a \notin X$. Assim, fica provado o teorema. □

Proposição 3.5. *Dada uma seq. decrescente $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \cdots$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ compactos e não vazios, a interseção $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ é não vazia.*

Demonstração. Para cada k, seja $x_k \in X_k$. Como (x_k) é uma seq. no compacto X_1, temos que (x_k) possui uma subseq. (x_{k_j}) convergente para $a \in X_1$. Agora, dado $k \in \mathbb{N}$, temos $x_{k_j} \in X_k$ para todo $k_j > k$ e, portanto, $a \in X_k$ para todo k. □

Teorema 3.6 (Teorema de Borel-Lebesgue)**.** *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ é aberto para todo $\lambda \in L$. Se K é compacto, então existe $E \subset L$ finito tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in E} A_\lambda$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema de Lindelöf, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots \in L$ tais que $K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{\lambda_k}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $X_k = K \cap (\mathbb{R}^n - (A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_k}))$. Assim, construímos uma cadeia de compactos

$$X_1 \supset \ldots \supset X_k \supset \ldots.$$

Agora, desde que $K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{\lambda_k}$, temos $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k = \emptyset$. Pelo corolário acima, segue que $X_k = \emptyset$ para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_k}$. □

A respeito de aplicações contínuas definidas em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, destacamos alguns resultados.

Proposição 3.7. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e $f \colon X \to \mathbb{R}^p$ contínua. Então $f(X) \subset \mathbb{R}^p$ é um subconjuto compacto.*

$\square$

Definição 3.8. *Uma aplicação* $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é dita* uniformemente contínua *quando: dado um par de seq. de pontos* (x_k) *e* (y_k) *em* X *com* $x_k - y_k \to 0$*, tem-se que* $f(x_k) - f(y_k) \to 0$.

Exemplo 3.9. *Aplicações Lipschitz são aplicações uniforme contínuas.*

$\square$

Proposição 3.10. *Aplicações contínuas com domínios compactos são uniforme contínuas.*

Demonstração. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, $Y \subset \mathbb{R}^m$ e $f : K \to Y$ uma aplicação contínua. Sejam $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tais que $x_k - y_k \to 0$. Suponha que existe $\delta > 0$ e subsequência $\{k_1, ..., k_j, ...\}$ tais que

$$\|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})\| \geq \delta, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como K é compacto, tomando subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim\limits_{j\to\infty} y_{k_j} = z_0 \in K$. Mas f é contínua, então $\|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})\| \to 0$. Mostrando que não pode existir tal $\delta > 0$ e, assim, $\|f(x_k) - f(y_k)\| \to 0$. Portanto, f é uniformemente contínua. $\square$

Caracterização. *Seja* $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Então,* f *é uniformente contínua se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ *sempre que* $x, y \in X$ *satisfazem* $\|x - y\| < \delta$. $\square$

Claramente, toda aplicação uniformemente contínua é uma aplicação contínua, porém existem aplicações contínuas que não são uniformemente contínuas.

Ainda a respeito das aplicações uniformente contínuas, destacamos a seguinte propriedade.

Proposição 3.11. *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação uniformente contínua. Então existe uma extensão uniformemente contínua de* f *para* $\overline{X}$.

Demonstração. Seja $x \in \overline{X}$. Então existe uma seq. de pontos (x_k) em X tal que $x_k \to x$. Desde que (x_k) é uma seq. de Cauchy e f é uniformemente contínua, a seq. $f(x_k)$ é de Cauchy e, portanto, converge para algum $y \in \mathbb{R}^m$. É fácil ver que y indepente da seq. (x_k), de fato, y só depende do ponto x. Definimos $F(x) = y$. Claramente, F é uma função definida em $\overline{X}$ que estende f. Resta-nos provar que F é uniformente contínua. Para tanto seja $\epsilon > 0$. Como f é uniformente contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \dfrac{\epsilon}{2}$ sempre que $x, y \in X$ satisfazem $\|x - y\| < \delta$. Assim, dado $v, w \in \overline{X}$ tais que $\|v - w\| < \delta$, sejam (x_k) e (y_k) seq. em X tais que $x_k \to v$ e $y_k \to w$. Assim, para n suficientemente grande, temos $\|x_k - y_k\| < \delta$ e, portanto, $\|f(x_k) - f(y_k)\| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Pela continuidade de f, segue que $\|F(v) - F(w)\| < \epsilon$. $\square$

4. Teorema do Valor Intermediário

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito *conexo* quando as únicas funções contínuas $X \to \{-1, 1\}$ são as funções constantes.

Já mostramos que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ são conjuntos conexos. Portanto, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^m$ e $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ são conjuntos conexos pois já conhecemos o seguinte resultado.

Proposição 4.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Então, X e Y são conexos se, e somente se, $X \times Y$ é conexo.*

Caracterização. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são simultaneamente abertos e fechados de X são: X e $\varnothing$.*

Demonstração. Exercício! $\square$

Teorema 4.2 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto conexo e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se existem $x, y \in X$ tais que $f(x) < 0 < f(y)$, então existe $z \in X$ tal que $f(z) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que f não se anule qualquer ponto de X. Seja $g\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $g(a) = \dfrac{f(a)}{|f(a)|}$. Assim, g é uma função contínua $X \to \{-1, 1\}$. Desde que X é conexo, deveríamos ter g constante. Por outro lado, $f(x) < 0$ acarreta $g(x) = -1$ e $f(y) > 0$ acarreta $g(y) = 1$. $\square$

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, definimos a *fronteira de X* por

$$\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}.$$

Observação. Dado $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ está na fronteira de X se, e somente se, $d(x, X) = d(x, \mathbb{R}^n - X) = 0$.

Teorema 4.3 (Teorema da Alfândega)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Se um subconjunto conexo $C \subset \mathbb{R}^n$ intersecta X e $\mathbb{R}^n - X$, então C intersecta a fronteira de X.*

Demonstração. Seja $f\colon C \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x, X) - d(x, \mathbb{R}^n - X)$. Claramente, f é contínua, pois é soma de funções contínuas. Desde que existem $a \in C \cap X$ e $b \in C \cap \mathbb{R}^n - X$, temos: $f(b) \leqslant 0 \leqslant f(a)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe $c \in C$ tal que $f(c) = 0$. Agora, lançamos mão da observação acima e finalizamos a prova. $\square$

De fato, o Teorema do Valor Intermediário pode ser enunciado na seguinte versão:

Proposição 4.4. *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo e $f: X \to \mathbb{R}^m$ contínua, a imagem $f(X) \subset \mathbb{R}^m$ é um subconjunto conexo.*

$\square$

A proposisão acima, dentre outras coisas, mostra que a conexidade é um invariante topológico.

Proposição 4.5. *Sejam $X_l \subset \mathbb{R}^n$; $l \in L$ subconjuntos conexos. Se a interseção $\bigcap\limits_{l \in L} X_l$ não é vazia, então a reunião $\bigcup\limits_{l \in L} X_l$ é um conjunto conexo.*

$\square$

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dado $x \in X$, seja C_x a reunião de todos os subconjuntos conexos de X que contêm x. O conjunto conexo C_x é chamado de *componente conexa de* X que contém x.

Observação. A relação de equivalência "$\sim$"sobre X definida por: $x \sim y$ se, e somente se $x \in C_y$, define uma partição de X onde as partes são chamadas de *as componentes conexas de* X.

Exemplo 4.6. *As componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 0\}$ são: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y < 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, y > 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, y < 0\}$.*

Definição 4.7. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito* conexo por caminhos *quando dados $x, y \in X$ existe $\gamma: [0, 1] \to X$ contínua tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.*

Exemplo 4.8. (a) *Todo subconjuto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos.*

(b) *$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é conexo por caminhos.*

Proposição 4.9. *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos, então Xé conexo.*

$\square$

Exemplo 4.10. *Sejam $Y = \{0\} \times \mathbb{R}$ e $X = \{(t, cos(\frac{1}{t})) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t > 0\}$. X e Y são conexos e $\overline{X}$ intersecta Y. De acordo com o exercício abaixo, $X \cup Y$ é conexo.*

Exercício. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos conexos. Se $\overline{X} \cap Y \neq \varnothing$, então $X \cup Y$ é conexo.

Agora, mostremos que a reunião definida no exemplo acima não é um conjunto conexo por caminhos.

`Afirmação.` $X \cup Y$ não é conexo por caminhos.

Prova da Afirmação. Suponhamos que exista $\gamma\colon [0,1] \to X \cup Y$ contínua tal que $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(1) = (\frac{2}{\pi}, 0)$. Escrevamos, para cada $t \in [0,1]$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Seja t_0 o supremo dos $t \in [0,1]$; $x(t) = 0$. Claramente, $x(t_0) = 0$ e, portanto, $t_0 < 1$. Pela continuidade de γ, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e tal que $|y(t) - y(t_0)| < \frac{1}{3}$ para todo $t_0 < t < t_0 + \epsilon$. Em particular,

$$|y(t) - y(s)| < 1$$

para quaisquer $t_0 < t, s < t_0 + \epsilon$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, todo número real no intervalo aberto $(0, x(t_0+\epsilon))$ está na imagem da função x restrita ao intervalo $(t_0, t_0+\epsilon)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $x_n = \frac{1}{n\pi}, x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi} \in (0, x(t_0 + \epsilon))$. Assim, existem $t_0 < t_n, t_{n+1} < t_0 + \epsilon$ tais que $x(t_n) = x_n$ e $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$. Finalizando a prova, temos: $\gamma(t_n) = (x(t_n), y(t_n)) \in X$, $\gamma(t_{n+1}) = (x(t_{n+1}), y(t_{n+1})) \in X$ e, portanto, $|y(t_n) - y(t_{n+1})| = 2$, o que é um absurdo. $\square$

Proposição 4.11. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Então, X é conexo se, e somente se, X é conexo por caminhos.*

5. Caminhos em $\mathbb{R}^n$

Dizemos que uma aplicação contínua $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é um *caminho* em $\mathbb{R}^n$.

Dado um caminho $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, para cada partição P de $[a,b]$

$$P \ : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b,$$

seja

$$l(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma_(t_{i-1})\|.$$

Se $\{l(\gamma, P) \ : \ P$ é partição de $[a,b]\}$ é limitado superiormente, então definimos o *comprimento* de γ por

$$l(\gamma) = \sup\{l(\gamma, P) \ : \ P \text{ é partição de } [a,b]\}.$$

Neste caso, dizemos que γ é um caminho *retificável.*

Exemplo. Seja $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definido por $\gamma(t) = A + (1-t)B$; $A, B \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, $l(\gamma) = \|A - B\|$.

Exemplo. Seja $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\gamma(t) = tcos\frac{1}{t}$ se $t \neq 0$ e $\gamma(0) = 0$. Claramente, γ é um caminho em $\mathbb{R}$. Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja P_k a partição de $[0,1]$ definida por:

$$t_0 = 0, t_{k+1-i} = \frac{2}{i\pi}, \ 0 < i < k+1, t_{k+1} = 1.$$

Observe que, se $0 < i < k+1$ for um número ímpar, então $\gamma(t_i) = 0$ e se for um número par, então $\gamma(t_i) = \pm\frac{2}{i\pi}$. Assim,

$$\begin{aligned} l(\gamma, P_k) &= \sum_{0 \le i \le k+1} \|\gamma(t_i) - \gamma_(t_{i-1})\| \\ &\geq \sum_{\substack{i \ par \\ 1 \le i \le k}} \|\gamma(t_i)\| \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{i \ par \\ 1 \le i \le k}} \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Portanto, γ não é retificável.

Proposição. *Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho. Sejam P e Q partições de $[a,b]$. Se Q refina P (isto é $P \subset Q$), então*

$$l(\gamma, P) \leq l(\gamma, Q).$$

Em particular, se

$$\lim_{|P|\to 0} l(\gamma, P) = l$$

então $l(\gamma) = l$.

Demonstração. É suficiente provarmos a primeira afirmação para $P = Q \cup \{q\}$. Assim, sendo

$$P \ : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b,$$

existe um único $0 < i \leq k$ tal que $i - 1 \leq q \leq i$. Dessa forma,

$$l(\gamma, Q) - l(\gamma, P) = \|\gamma(q) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_i) - \gamma(q)\| - \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

que, pela desigualdade triangular, é não negativo.

Agora, seja

$$\lim_{|P|\to 0} l(\gamma, P) = l.$$

Suponhamos que exista uma partição P_0 de $[a, b]$ tal que $l < l(\gamma, P_0)$ e seja $\epsilon = l(\gamma, P_0) - l$. então existe $\delta > 0$ tal que $\|P\| < \delta \Rightarrow l - \epsilon < l(\gamma, P) < l + \epsilon$, em particular, $l(\gamma, P) < l(\gamma, P_0)$. Se tomarmos $\|P\| < \delta$ refinando P_0, temos um absurdo. □

Métrica do Comprimento.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto conexo por caminhos. Suponhamos que para cada par de pontos $x, y \in M$ existe um caminho retificável $\gamma\colon [a, b] \to M$ tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. Definimos $d_M(x, y)$ por

$$d_M(x, y) = \inf\{l(\gamma) \ ; \gamma\colon [a, b] \to M \text{ é caminho retificável}, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

Afirmamos que d_M define uma métrica em M a qual denominamos *métrica do comprimento* (induzida da métrica euclidiana de $\mathbb{R}^n$).

Proposição. d_M *define uma métrica em* M.

Demonstração. Primeiro, mostramos que $d_M(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. De fato, se $x = y$ o caminho constante $\gamma\colon [a, b] \to M$; $\gamma(t) = x$ para todo t, é retificável e $l(\gamma) = 0$. Portanto, $d_M(x, x) = 0$. Por outro lado, se $x \neq y$, como toda partição de $[a, b]$ refina a partição trivial $P \ : t_0 = a < t_1 = b$, tem-se que $l(\gamma) \geq |x - y|$ para todo caminho retificável $\gamma\colon [a, b] \to M$ tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. Portando, $d_M(x, y) \geq \|x - y\|$.

A respeito da simetria da função d_M, claramente, nada temos a provar. Antes de provarmos que d_M satisfaz a desigualdade triangular, consideremos o seguinte

Lema. *Seja* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *um caminho. Dado* $c \in [a, b]$*, os caminhos* $\gamma_1 = \gamma_|[a, c]$ *e* $\gamma_2 = \gamma_|[c, b]$ *são retificáveis se, e somente se,* γ *é retificável. E, nesse caso,*

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

Prova do Lema. Uma partição P de $[a, b]$ contém c se, e somente se $P = P_1 \cup P_2$ em que P_1 e P_2 são partições de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente. Além disso, claramente,

$$l(\gamma, P) = l(\gamma_1, P_1) + l(\gamma_2, P_2).$$

Da equação acima, segue que γ é retificável se, e somente se, γ_1 e γ_2 são retificáveis. Finalmente, $|P| \to 0$ se, e somente se, $|P_1| \to 0$ e $|P_2| \to 0$ e, novamente da equação acima,

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

□

Agora, provemos que d_M satisfaz a desigualdade triangular. Para tanto, sejam $x, y, z \in M$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\gamma_1\colon [0,1] \to M$ tal que $\gamma_1(0) = x$ e $\gamma_1(1) = y$ e seja $\gamma_2\colon [1,2] \to M$ tal que $\gamma_2(1) = y$ e $\gamma_2(2) = z$ satisfazendo

$$l(\gamma_1) < d_M(x,y) + \epsilon \text{ e } l(\gamma_2) < d_M(y,z) + \epsilon.$$

Logo, $\gamma\colon [0,2] \to M$ definido pela justaposição de γ_1 e γ_2 é um caminho retificável em M conectando x a z e, além disso,

$$\begin{aligned} d_M(x,z) &\leq l(\gamma) \\ &= l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \\ &< d_M(x,y) + d_M(y,z) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

□

Exemplos.

- Todo $M \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo, admite a métrica do comprimento.

Demonstração. Fazer. □

- Dados $M \subset \mathbb{R}^n$ admitindo a métrica do comprimento e $f\colon M \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação localmente Lipschitz, tem-se que a imagem $f(M) \subset \mathbb{R}^m$ e o gráfico $graf(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ admitem a métrica do comprimento.

Demonstração. Exercício. □

- S^n admite a métrica do comprimento induzida da métrica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Fazer. □

Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é chamado uma *superfície Lipschitz* (de dimensão m) se para cada $x \in M$ existe um aberto A de M contendo x e um homeomorfismo bi-Lipschitz (com respeito à métrica euclidiana) $\phi\colon A \to B(0,1)$.

- Toda superfície Lipschitz $M \subset \mathbb{R}^n$ admite a métrica do comprimento.

Demonstração. Exercício. □

- Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = tcos(\frac{1}{t})$ se $t \neq 0$ e $f(0) = 0$. Desde que f é contínua, o gráfico de f é uma superfície topológica. Contudo, o gráfico de f não admite a métrica do comprimento induzida de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (veja exemplo no início da aula).

- Todo subconjunto algébrico e conexo $M \subset \mathbb{R}^n$ admite a métrica do comprimento.

Demonstração. Não fazer. □

6. O Teorema do Valor médio para caminhos

Sejam $\gamma\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que α é uma *reparametrização* de γ, se existe uma função monótona e sobrejetiva $h\colon [a,b] \to [c,d]$ tal que $\alpha = \gamma \circ h$.

Observações.

- h pode não ser injetiva.

- γ é contínua se, e somente se, α é contínua (veja Exercício **??** no final da aula).

Proposição. *Sejam $\gamma\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Se α é uma reparametrização de γ, então γ é retificável se, e somente se, α é retificável. Nesse caso, $l(\alpha) = l(\gamma)$.*

Demonstração. Seja $h\colon [a,b] \to [c,d]$ uma função monótona e sobrejetiva tal que $\alpha = \gamma \circ h$. Suponhamos que h seja não-decrescente.

Primeiro, suponhamos que γ seja retificável. Dada uma partição P de $[a,b]$, se existem $t_i, t_{i+1} \in P$ tais que $h(t_i) = h(t_{i+1})$, então $P^* = P - \{t_i\}$ é partição de $[a,b]$ tal que $l(\alpha, P) = l(\alpha, P^*)$. Assim, para obter $l(\alpha)$, é suficiente considerarmos apenas partições P de $[a,b]$

$$P \ : \ a = t_0 < \cdots < t_k = b$$

tais que h é injetiva quando restrita a P. Nesse caso, $Q = h(P)$, isto é,

$$Q \ : \ c = h(t_0) < \cdots < h(t_k) = d$$

define uma partição de $[c,d]$ e

$$\begin{aligned} l(\gamma, Q) &= \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(h(t_i)) - \gamma(h(t_{i-1}))\| \\ &= \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \\ &= l(\alpha, P). \end{aligned}$$

Logo, α é retificável e $l(\alpha) \leq l(\gamma)$.

Reciprocamente, suponhamos que α seja retificável. Então, para cada partição Q de $[c,d]$,

$$Q \ : \ c = t_0 < \cdots < t_k = d,$$

como h é sobrejetiva, existem

$$P \ : \ a = s_0 < \cdots < s_k = b,$$

dados por $h(s_i) = t_i$, definindo uma partição P de $[a, b]$ e

$$\begin{aligned} l(\gamma, Q) &= \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(h(s_i)) - \gamma(h(s_{i-1}))\| \\ &= l(\alpha, P). \end{aligned}$$

Logo, γ é retificável e $l(\gamma) \leq l(\alpha)$. □

Seja $\gamma[a, b] \to \mathbb{R}^n$ retificável. Dizemos que γ é *parametrizada pelo comprimento de arco* (p.p.c.a.) se para cada $t \in [a, b]$, $l(\gamma_{|[a,t]}) = t - a$.

Teorema. *Todo caminho retificável é a reparametrização de um caminho parametrizado pelo comprimento de arco.*

Antes de provarmos o teorema acima, vejamos uma solução parcial do problema proposto na aula passada.

Problema. Para cada $f : S^1 \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz e injetiva, seja $M = f(S^1)$ e seja $n(f, S^1)$ definido por

$$n(f, S^1) = \sup\{\frac{d_M(x, y)}{\|x - y\|} \ : \ x, y \in M, \ x \neq y\}.$$

Mostre que $n(f, S^1) \geq \dfrac{\pi}{2}$.

Solução. Seja $f : S^1 \to \mathbb{R}^n$ λ-Lipschitz e injetiva e seja $M = f(S^1)$. Seja $\phi : [0, 2\pi] \to S^1$ dada por $\phi(t) = (cos(t), sen(t))$. Seja $\alpha = f \circ \phi$. Já sabemos que α é retificável, pois ϕ é retificável e f é Lipschitz. Sem perda de generalidade, podemos supor α p.p.c.a. e seja $l = l(\alpha)$.

`Afirmação.` $\beta : [0, l/2] \to \mathbb{R}^n$ definida por $\beta(t) = \alpha(t + l/2) - \alpha(t)$ tem comprimento $l(\beta) \leq l$.

Prova da Afirmação. De fato, seja P uma partição de $[0, l/2]$,

$$P \ : \ 0 = t_0 < \cdots < t_k = l/2.$$

Sejq Q a partição de $[0, l]$ definida a partir de P por:

$$Q \ : \ t_0 < \cdots < t_k < t_1 + l/2 < \cdots < t_{k-1} + l/2 < t_k + l/2 = l.$$

Assim

$$\begin{aligned} l(\beta, P) &= \sum_{i=1}^{k} \|\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i + l/2) - \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1} + l/2) + \alpha(t_{i-1})\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\| + \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i + l/2) - \alpha(t_{i-1} + l/2)\| \\ &= l(\alpha, Q) \\ &\leq l(\alpha) = l. \end{aligned}$$

Assim, fica provada a afirmação acima.

Vale observar também que existe $t_0 \in [0, l/2]$ tal que $\|\beta(t_0)\| \leq l/\pi$, pois caso contrário, pelo Exercício **??** da aula passada, teríamos $l(\beta) > \pi l/\pi = l$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} n(f, S^1) &\geq \sup_{0 \leq t \leq \pi} \frac{d_M(\alpha(t + l/2), \alpha(t))}{\|\alpha(t + l/2) - \alpha(t)\|} \\ &= \sup_{0 \leq t \leq l/2} \frac{l/2}{\|\beta(t)\|} \quad (\alpha \text{ é p.p.c.a.}) \\ &\geq \frac{l}{2\|\beta(t_0)\|} \\ &\geq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Nas condições do Teorema acima, seja $l = l(\gamma)$.

Lema. *$h \colon [a, b] \to [0, l]$ definida por $h(t) = l(\gamma_{|[a,t]})$ é contínua. Além disso, como $h(b) = l$, h é sobrejetiva.*

Demonstração. Claramente, h é uma função não-decrescente. Mostraremos que é suficiente mostrar que h é contínua em b. Seja

$$A = \sup_{a \leq t < b} h(t).$$

Afirmamos que $A = h(b)$. Suponhamos que este não seja o caso, isto é, $A < h(b)$. Seja $0 < 2\epsilon < h(b) - A$. Desde que γ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - s| < \delta \;\Rightarrow\; \|\gamma(t) - \gamma(s)\| < \epsilon.$$

Fixemos $c \in [a, b)$ tal que $A - \epsilon < h(c) < A$. Agora, dada uma partição P de $[c, b]$,

$$P \;:\; c = t_0 < \cdots < t_k = b,$$

tal que $|P| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} l(\gamma_{|[c,b]}, P) &= \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| + \sum_{i=1}^{k-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &< \epsilon + l(\gamma_{|[c,t_{k-1}]}) \\ &= \epsilon + h(t_{k-1}) - h(c) \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $l(\gamma_{|[c,b]}) \leq 2\epsilon$, isto é, $h(b) - h(c) \leq 2\epsilon$, o que é uma contradição. □

Prova do Teorema. Dado $s \in [0, l]$, existe $t \in [a, b]$ tal que $h(t) = s$, pois h é sobrejetiva. Defina $\alpha(s) := \gamma(t)$.

`Afirmação.` $\alpha \colon [0, l] \to \mathbb{R}^n$ está bem definida.

De fato, sejam $t < t^{'}$ tais que $h(t) = h(t^{'})$. Queremos mostrar que $\gamma(t) = \gamma(t^{'})$. Para tanto, observemos

$$\begin{aligned} h(t^{'}) &= h(t) + l(\gamma_{|[t,t']}) \\ &\geq h(t) + \|\gamma(t) - \gamma(t^{'})\| \end{aligned}$$

daí, $\gamma(t) = \gamma(t^{'})$.

A continuidade de α segue do Exercício **??** da Lista de Exercícios **??**. Finalmente, é fácil ver que α é p.p.c.a.

□

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$; $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Se as funções reais, $x_1(t), \dots, x_n(t)$ são diferenciáveis em $t_0 \in I$, dizemos que γ é *diferenciável em* t_0 e denotamos

$$\gamma^{'}(t_0) = (x_1^{'}(t_0), \dots, x_n^{'}(t_0)).$$

Quando γ é diferenciável em cada $t \in I$, dizemos que γ é *diferenciável.*

Seja $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Quando $\gamma^{'}\colon I \to \mathbb{R}^n$; $t \mapsto \gamma^{'}(t)$, é contínua, dizemos que γ é *de classe* C^1.

Desigualdade do Valor Médio. *Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável no aberto (a,b). Se $\|\gamma^{'}(t)\| \leq M$ para todo $t \in (a,b)$, então $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq M(b-a)$.*

Demonstração. Fazer. □

Teorema. *Seja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^1. Então, γ é retificável e*

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma^{'}(t)\| dt.$$

Exemplo. Seja $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(t) = (cos(t), sen(t))$. Segue do teorema acima que $l(\phi) = 2\pi$.

Exemplo. Seja $x \in S^n$. Então $d_{S^n}(x, -x) = \pi$. De fato, primeiro recorremos ao Exercício **??** da aula passada para obter que $d_{S^n}(x, -x) \geq \pi$. Agora, seja $y \in S^n$ tal que $< x, y >= 0$. Seja $\alpha[0, \pi] \to S^n$ definida por $\alpha(t) = cos(t)x + sen(t)y$. Temos que $\alpha(0) = x$, $\alpha(\pi) = -x$. Pelo teorema acima, $l(\alpha) = \pi$. Portanto, $d_{S^n}(x, -x) = \pi$.

7. Aplicações diferenciáveis

Problema. Encontre os valores extremos da função $f(x, y) = x+y$ no disco $D\ : x^2+y^2 \leq 1$.

Solução. Fazer.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $p \in U$ e $f\colon U \to \mathbb{R}$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, quando existe o limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

é chamado a *derivada direcional* de f no ponto p, na direção v. Nesse caso, utilizamos a seguinte notação:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}.$$

Quando $v = e_i$ é um vetor da base canônica a derivada direcional de f no ponto p, na direção e_i, é chamada uma *derivada parcial* de f no ponto p.

Exemplo. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{7.1}$$

Temos que f não é contínua no ponto $(0, 0)$ enquanto existem as derivadas parciais de f em $(0, 0)$.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é de classe C^1 quando em cada ponto de U a função f possui todas as derivadas parciais, e estas derivadas parciais são funções contínuas $U\colon \to \mathbb{R}$.
Exemplo. Toda função polinomial $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, pois as suas derivadas parciais ainda são funções polinomiais.

Proposição. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}$ uma função que possui todas as derivadas parciais em U. Se $p \in U$ é um ponto extremo de f, isto é, $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in U$ ou $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in U$, então*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

Demonstração. Fazer. □

Problema. Encontre os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 - y^2$ no disco $D\ : x^2 + y^2 \leq 1$.

solução. Fazer.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $p \in U$ e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é *diferenciável* em p quando existe uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(p + h) - f(p) = T(h) + r(h)\ ;\ \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0. \tag{7.2}$$

Vale observar que, com respeito à definição acima, não existe mais de uma aplicação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfazendo 7.2. Nesse caso, denotamos $Df(p) = T$.

Exemplos.
- $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ constante $\Rightarrow Df(p) = 0$ para todo $p \in U$.
- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear $\Rightarrow Df(p) = f$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.
- Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $p \in U$. Então, o funcional linear $Df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dado por

$$Df(p)(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)x_n.$$

Dado um funcional linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sabemos que existe um único vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) =< x, v >$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. O exemplo acima, mostra que: dada $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $p \in U$ o vetor $\nabla f(p) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p))$ chamado o *gradiente* de f em p satisfaz:

$$Df(p)(x) =< x, \nabla f(p) >,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $p \in U$ e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ com funções coordenadas $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Então, f é diferenciável em p se, e somente se, as funções coordenadas $f_1, \ldots, f_n$ são diferenciáveis em p. Nesse caso, $Df(p)$ é dada por:*

$$Df(p)(x) = (Df_1(p)(x), \ldots, Df_n(p)(x)).$$

Demonstração. □

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é de classe C^1 quando as suas funções coordenadas são de classe C^1. Equivalentemente, f é de classe C^1 quando f é diferenciável em U e a aplicação $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dada por $p \mapsto Df(p)$ é contínua.

Proposição. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Se f é de classe C^1, então f é diferenciável em U.*

Demonstração. Claramente é suficiente provarmos a proposição acima para o caso $m = 1$. Simplesmente para efeito de clareza na prova, suporemos $n = 2$. Seja $p = (x_1, x_2) \in U$ e seja $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável, existem $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tais que

$$\begin{aligned}
r(h) &= f(p+h) - f(p) - < \nabla f(p), h > \\
&= f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2) + f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1,x_2) \\
&\quad -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)h_2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\theta_2 h_2)h_2 \\
&\quad -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)h_2
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{r(h)}{\|h\|} &= [\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)h_1]\frac{h_1}{\|h\|} + \\
&\quad [\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+\theta_2 h_2)h_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)h_2]\frac{h_2}{\|h\|}.
\end{aligned}$$

Desde que as derivadas parciais de f são contínuas, temos $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ quando $h \to 0$. $\square$

Exercício. Uma aplicação $f\colon U \to$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 quando f é diferenciável em U e a aplicação $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dada por $p \mapsto Df(p)$ é contínua.

Uma aplicação $f\colon U \to$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^k quando f é diferenciável em U e a aplicação $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dada por $p \mapsto Df(p)$ é de classe C^{k-1}.

Exemplo.

- A aplicação $X \mapsto \det(X)$, com domímio no conjunto das matrizes reais $n \times n$ é de classe C^∞.

Demonstração. Fazer. $\square$

- A aplicação $X \mapsto X^{-1}$, com domímio no conjunto das matrizes reais e invertíveis $n \times n$ é de classe C^∞.

Demonstração. Fazer. $\square$

Regra da Cadeia. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $a \in U$ e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em a. Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto contendo $f(U)$ e $g\colon V \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável em $f(a)$. Então, a composição $g \circ f$ é uma aplica cão diferenciável em a e $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a)$.*

Demonstração. Sejam

$$f(a+h) = f(a) + Th + r(h),\ \forall\ a+h \in X \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

e

$$g(b+w) = g(b) + Sw + s(w),\ \forall\ b+w \in X \quad \text{com} \quad \lim_{w\to 0} \frac{s(w)}{\|w\|} = 0,$$

em que $b = f(a)$, $T = Df(a)$ e $S = Dg(b)$. Façamos $u = f(a+h) - f(a)$ e, daí:

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(u + f(a)) \\ &= g(f(a)) + Su + s(u) \\ &= g(f(a)) + STh + Sr(h) + s(u) \end{aligned}$$

Agora, desde que $\lim_{w \to 0} \frac{s(w)}{\|w\|} = 0$, e existe $k > 0$ tal que $|u| \leq k|h|$ para h suficientemente pequeno, temos $\lim_{h \to 0} \frac{s(u)}{\|h\|} = 0$ e portanto, $\lim_{h \to 0} \frac{Sr(h) + s(u)}{\|h\|} = 0$.

Assim, concluímos que $g \circ f$ é difer. em a com $D(g \circ f)(a) = ST = Dg(f(a))Df(a)$. $\square$

Desigualdade do Valor Médio. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em cada ponto do segmento de reta $(a,b) \subset U$ e contínua no segmento fechado $[a,b] \subset U$. Se $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$, então $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$.*

Corolário. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e conexo e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em U. Se $Df(x) = 0$ para todo $x \in U$, então f é constante.*

8. Teorema da Aplicação Inversa

Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos e $f\colon U \to V$ uma bijeção diferenciável com inversa $g\colon V \to U$. Quando g também é diferenciável, dizemos que f é um *difeomorfismo*. Pode acontecer, de g não ser diferenciável, esse é o caso do exemplo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$. Quando a inversa $g\colon V \to U$ também é diferenciável, tem-se, necessariamente, que $Df(x)$ é um isomorfismo linear para todo $x \in U$, pois $g \circ f(x) = x$ implica, pela Regra da Cadeia, que $Dg(f(x))Df(x) = I$.

Proposição. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos e $f\colon U \to V$ um homeomorfismo diferenciável com inversa $g\colon V \to U$. Seja $x \in U$ tal que $Df(x)$ é um isomorfismo linear, então g é diferenciável em $y = f(x)$ e $Dg(y) = [Df(x)]^{-1}$.*

Demonstração. Sejam $y = f(x)$ e $y + w = f(x + v)$. Logo, $w = Df(x)v + r(v)$ com $\dfrac{r(v)}{\|v\|} \to 0$ quando $v \to 0$. Observe que $v = g(y + w) - g(y)$ e, definindo

$$s(w) = g(y + w) - g(y) - [Df(x)]^{-1}w,$$

obtemos $\dfrac{s(w)}{\|w\|} = [Df(x)]^{-1}\dfrac{r(v)}{\|w\|}$.

Resta-nos mostrar que $\dfrac{r(v)}{\|w\|} \to 0$ quando $w \to 0$. Para tanto, desde que $Df(x)$ é um isomorfismo linear, existe $c > 0$ tal que $\|Df(x)v\| \geq c\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ e, desde que $\dfrac{r(v)}{\|v\|} \to 0$ quando $v \to 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|v\| < \delta$ implica $\dfrac{r(v)}{\|v\|} < \dfrac{1}{2}c$. Logo, para $\|v\| < \delta$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|w\|}{\|v\|} &= \frac{\|f(x+v) - f(x)\|}{\|v\|} \\
&= \frac{\|Df(x)v + r(v)\|}{\|v\|} \\
&\geq \|Df(x)\frac{v}{\|v\|}\| - \frac{\|r(v)\|}{\|v\|} \\
&> \frac{1}{2}c
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{r(v)}{\|w\|} = \frac{r(v)}{\|v\|} \cdot \frac{\|v\|}{\|w\|} \to 0$$

quando $w \to 0$. $\square$

O resultado que apresentamos abaixo, conhecido como o Teorema da Aplicação Inversa, é suficientemente esclarecedor quanto às questões naturais que surgem a partir do que foi exposto acima.

Teorema da Aplicação Inversa. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1. Seja $a \in U$ tal que $Df(a)$ é um isomorfismo linear. Então, existem $W \subset U$ aberto contendo a e $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo $y = f(a)$ tais que $f\colon W \to V$ é um difeomorfsimo de classe C^1.*

Demonstração. Antes de tudo, notemos que, desde que $Df(a)$ é um isomorfismo linear, existe $c > 0$ tal que $\|Df(a)v\| \geq c\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ e, desde que Df é uma aplicação contínua, podemos supor (diminuíndo o aberto U se necessário) que $Df(x)$ é um isomorfismo linear em todo $x \in U$.

`Afirmação 1.` Existe uma bola fechada $B[a, \delta]$ tal que f é injetiva em $B[a, \delta]$.

De fato, escrevendo

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + r(x - a)$$

temos que $h(x) = r(x-a)$ é uma aplicação de classe C^1 definida em U, que possui derivada nula no ponto $x = a$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| \leq \delta$ implica $\|Dh(x)\| < \frac{1}{2}c$. Assim, dados $x, y \in B[a, \delta]$, temos

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\| &= \|Df(a)(x - y) + h(x) - h(y)\| \\
&\geq \|Df(a)(x - y)\| - \|h(x) - h(y)\| \\
&\geq c\|x - y\| - \frac{1}{2}c\|x - y\| \\
&= \frac{1}{2}c\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Logo f é injetiva em $B[a, \delta]$ e fica provada a afirmação.

Na verdade, $f : B[a, \delta] \to f(B[a, \delta])$ é um homeomorfismo com inversa Lipschitz, pois se $u, v \in f(B[a, \delta])$, então existem $x, y \in B[a, \delta]$ tais que $u = f(x)$ e $v = f(y)$. Assim, sendo $g = \left(f|_{B[a,\delta]}\right)^{-1}$, temos

$$\|g(u) - g(v)\| = \|x - y\| \leq \frac{2}{c}\|f(x) - f(y)\| = \frac{2}{c}\|u - v\|.$$

Agora, seja $W = B(a, \delta)$.

`Afirmação 2.` A imagem $V = f(W)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

De fato, seja $z_0 \in V$ e seja $x_0 \in W$ tal que $f(x_0) = z_0$. Como f é injetiva no conjunto $\overline{W}$, a distância $d = d(z_0, f(\partial W))$ é um número real positivo. Seja $0 < 2r < d$. Mostraremos que $B(z_0, r) \subset V$. Com efeito, dado $z \in B(z_0, r)$, seja p ponto mínimo da função

$$\phi\colon \overline{W} \to \mathbb{R}$$

dada por $\phi(x) = \|f(x) - z\|$. Se tivéssemos $p \in \partial W$, teríamos

$$\begin{aligned} d(z_0, f(\partial W)) &\leq \|z_0 - f(p)\| \\ &\leq \|z_0 - z\| + \|f(p) - z\| \\ &< r + \phi(p) \\ &\leq r + \phi(x_0) \\ &< 2r \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, p está no aberto W e, daí,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p) = 0 \ \ \forall \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Isto é,

$$< Df(p)e_i, f(p) - z >= 0 \ \ \forall \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Desde que $Df(p)$ é um isomorfismo, $f(p) = z$. Fica provada a afirmação.

Finalmente, resta-nos mostrar que a inversa $g\colon V \to W$ é de classe C^1. Para tanto, recorremos à proposição acima para obter que g é diferenciável e $Dg(y) = Inv \circ Df \circ g(y)$ para todo $y \in V$, em que Inv é a aplicação com domímino no conjunto das matrizes reais e invertíveis de ordem n, ou seja, Dg é uma composição de aplicações contínuas. $\square$

9. Forma Local das Submersões e Imersões

Exemplo. Sejam $T, S: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ aplicações lineares sobrejetoras. Então, existe um isomorfismo linear $\varphi: \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $S = T \circ \varphi$.

Demonstração. Seja $e_1, \ldots, e_m$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Seja $v_1, \ldots, v_m, \ldots, v_{m+n}$ base de $\mathbb{R}^{m+n}$ tal que $T(v_1) = e_1, \ldots, T(v_m) = e_m$ e $T(v_{m+1}) = \cdots = T(v_{m+n}) = 0$ também seja $u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_{m+n}$ base de $\mathbb{R}^{m+n}$ tal que $S(u_1) = e_1, \ldots, S(u_m) = e_m$ e $S(u_{m+1}) = \cdots = S(u_{m+n}) = 0$. Seja $\varphi \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ isomorfismo linear definido por $\varphi(v_i) = u_i$ para $i = 1, \ldots, m+n$. Então, $S \circ \phi = T$. □

Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f: U \to \mathbb{R}^m$ e $g: V \to \mathbb{R}^m$. Sejam $a \in U$ e $b \in V$. Dizemos que (f, a) é $\mathcal{R}$-*equivalente* a (g, b) (por mudança de coordenadas de classe C^k), se existem abertos $U_1 \subset U$, contendo a, $V_1 \subset V$, contendo b e um difeomorfismo de classe C^k $\phi: V_1 \to U_1$ tal que $f \circ \phi(x) = g(x)$ para todo $x \in V_1$ e $\phi(b) = a$.

Observação. A $\mathcal{R}$-equivalência acima, define uma relação de equivalência.

Forma Local das Submersões. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um subconjunto aberto, $f: U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Seja $a \in U$ tal que $Df(a): \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear sobrejetiva e seja $L: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a projeção afim, $L(x, y) = x + f(a)$. Então (f, a) é $\mathcal{R}$-equivalnete a $(L, 0)$ (por mudança de classe C^k).*

Demonstração. Primeiro, deixe-nos supor que $f(a) = 0$. Seja $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um complemento linear de $\ker(Df(a))$, isto é, $\mathbb{R}^{m+n} = E \bigoplus \ker(Df(a))$. Em particluar, $Df(a)$ aplica E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$.Denotemos a inversa de $Df(a): E \to \mathbb{R}^m$ por T. Desde que a dimensão de $\ker(Df(a))$ é n, existe uma aplicação linear injetiva $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ cuja imagem é $\ker(Df(a))$. Agora, seja $H: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ definida por $H(x, y) = T(x) + S(y) + a$ e seja $\tilde{U} = H^{-1}(U)$. Desde que H é um isomorfismo afim, $\tilde{U}$ é um subconjunto aberto com $0 = H^{-1}(a) \in \tilde{U}$. Finalmente seja $F: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por $F(x, y) = (f(H(x, y)), y)$. Claramente, a derivada $DF(0): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear, pois $DF(0) = (I_{\mathbb{R}^m}, I_{\mathbb{R}^n})$. Logo, existe $W \subset \tilde{U}$ aberto contendo 0 tal que $V = F(W)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$ e $F: W \to V$ é um difeomorfismo de classe C^k. Denotando a inversa de $F: W \to V$ por ϕ, de $F \circ \phi(x, y) = (x, y)$, obtemos que $f(H \circ \phi(x, y)) = x$.

No caso geral, isto é, não supondo que $f(a) = 0$, seja $g(x) = f(x) - f(a)$. Como $Dg(a) = Df(a)$ e $g(a) = 0$, temos abertos $U_1 \subset U$ contendo a e $V_1 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ contendo 0 e um difeomorfismo $\phi: V_1 \to U_1$, com $\phi(0) = a$ e $g(\phi \circ (x, y)) = x$ para todo $(x, y) \in V_1$, isto é, $f(\phi \circ (x, y)) = x + f(a)$ para todo $(x, y) \in V_1$. Consequentemente, (f, a) é $\mathcal{R}$-equivalente a $(L, 0)$ por mudança de classe C^k. □

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \to \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é uma *submersão* de classe C^k, quando f é uma aplicação de classe C^k tal que $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva para todo $x \in U$.

Corolário. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \to \mathbb{R}^m$ uma submersão de classe C^k $(k \geq 1)$. Então, para cada $a \in U$, (f, a) é $\mathcal{R}$-equivalente $(L, 0)$, em que $L: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ é a projeção afim $L(x, y) = x + f(a)$. Em particular, f é uma aplicação aberta e, para cada c na imagem de f, o subconjunto $f^{-1}(c) \subset U$ é uma superfície topológica de dimensão $n - m$.*

Exemplo. Sejam $T, S: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ aplicações lineares injetivas. Então, existe um isomorfismo linear $\psi: \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $S = \psi \circ T$.

Demonstração. Fixemos uma base $\{e_1, \ldots, e_{m+n}\}$ de $\mathbb{R}^{m+n}$. Seja $\{v_1, \ldots, v_m\}$ base de $\mathbb{R}^m$ tal que $T(v_1) = e_1, \ldots, T(v_m) = e_m$. Desde que $S(v_1), \ldots, S(v_m)$ são linearmente independentes, existe um isomorfismo linear $\phi\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $\psi(e_i) = S(v_i)$ para $i = 1, \ldots, m$. Então, $\psi \circ T = S$. □

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f, g: U \to \mathbb{R}^m$. Seja $a \in U$. Dizemos que (f, a) é *$\mathcal{L}$-equivalente* a (g, a) (por mudança de coordenadas de classe C^k), se existem abertos $\tilde{U} \subset U$, contendo a, $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^m$, contendo $f(\tilde{U})$ e $g(\tilde{U})$ respectivamente, e um difeomorfismo de classe C^k $\phi: V_1 \to V_2$ tal que $\phi \circ f(x) = g(x)$ para todo $x \in \tilde{U}$.

Forma Local das Imersões. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto, $f: U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Seja $a \in U$ tal que $Df(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é uma aplicação linear injetiva e seja $J: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a imersão linear, $J(x) = (x, 0))$. Então (f, a) é $\mathcal{L}$-equivalnete a $(J, 0)$ (por mudança de classe C^k).*

Demonstração. Sejam $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$ a imagem de $Df(a)$ e $F \subset \mathbb{R}^{m+n}$ o seu complemento linear. Temos um isomorfismo linear $S: \mathbb{R}^n \to F$. Seja $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ dada por $F(x, y) = f(x) + S(y)$. Claramente, $DF(a, 0): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ é um isomorfismo linear, assim, pelo Teorema da Função Inversa, existem $\tilde{U} \subset U$ aberto contendo a, $W \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo 0, $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto contendo $F(a, 0)$ e um difeomorfsimo de classe C^k $\phi: W \to U \tilde{\times} V$; $\phi \circ F(x, y) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in \tilde{U} \times V$. Em particular, fazendo $y = 0$, $\phi \circ f(x) = (x, 0)$ para todo $x \in \tilde{U}$. □

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \to \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é uma *umersão* de classe C^k, quando f é uma aplicação de classe C^k tal que $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva para todo $x \in U$.

Corolário. Imersões de classe C^k $(k \geq 1)$ são aplicações localmente injetivas.

Leitura recomendada: Teorema do Posto e consequências. (Curso de Análise Vol 2, a partir página 300).

10. Lema de Morse e Teorema da Aplicação Implícita

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. A forma quadrática $H_f(x)$ definida pela matriz $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x))$ é chamada *hessiana de* f no ponto x.

Obs. Decorre do Teorema de Schwarz que a matriz $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x))$ é simétrica.

Um ponto crítico $p \in U$ de f é dito *não-degenerado* quando a matriz de $H_f(p)$ possui determinante não-nulo.

Prosseguimos com mais aplicações do Teorema da Função Inversa.

Lema de Morse. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k $(k \geq 3)$. Seja $p \in U$ um ponto crítico não-degenerado de f. Então, (f, p) é $\mathcal{R}$-equivalente a $(Q, 0)$ (por mudança de classe C^{k-2}) em que $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$Q(y_1, \ldots, y_n) = -y_1^2 - \cdots - y_r^2 + y_{r+1}^2 + \cdots + y_n^2$$

e r = número de autovalores negativos da hessiana de f no ponto crítico p.

Demonstração. Suponhamos que $p = 0$ e $f(p) = 0$. Pelo Exercício **??** da Lista de Exercícios **??**, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}(x)$$

em que $h_{ij}: U \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^{k-2}. Trocando, h_{ij} por $\dfrac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, podemos supor que $h_{ij} = h_{ji}$, isto é,

$$f(x) = < H(x) \cdot x, x >$$

para todo $x \in U$ com $H(x) = (h_{ij}(x))$. Por hipótese, a matriz $H(0)$ é invertível, logo, para cada $x \in U$, podemos considerar $A(x) = [H(0)]^{-1} H(x)$. Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno; para todo $x \in B(0, \epsilon) \subset U$ existe uma única matriz $B(x)$ próxima da matriz identidade e tal que $B(x)^2 = A(x)$ (veja Exercício **??** da Lista de Exercícios **??**). Diminuíndo ϵ se necessário, verifica-se que

$$H(x) = B(x)^t H(0) B(x)$$

para todo $x \in B(0, \epsilon)$. Portanto,

$$f(x) =< H(0)B(x) \cdot x, B(x) \cdot x >$$

para todo $x \in B(0, \epsilon)$. Agora, seja $\phi: B(0, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(x) = B(x) \cdot x$. Desde que $D\phi(0) = I$, pelo Teorema da Função Inversa, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo 0 e tal que $\phi: B(0, \epsilon) \to V$ é um difeomorfismo de classe c^{k-2}. Seja $\psi: V \to W$ a inversa de $\phi: B(0, \epsilon) \to V$. Então,

$$f(\psi(y)) =< H(0) \cdot y, y >$$

para todo $y \in V$.

Finalmente, o resultado segue do Teorema de Silvester para formas quadráticas. □

Corolário. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k ($k \geq 3$). Seja $p \in U$ um ponto crítico de f.*

1. *Se todos os autovalores de $H_f(p)$ são positivos, então p é um ponto de mínimo local de f.*

2. *Se todos os autovalores de $H_f(p)$ são negativos, então p é um ponto de máximo local de f.*

Teorema da Função Implícita. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f: U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$). Sejam $f_1, \ldots, f_n$ as funções coordenadas de f e $p = (a, b) \in U$ com $f(p) = c$. Se a matriz*

$$[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p)] \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

é invertível, então existem $Z \subset U$ aberto contendo p, $V \subset \mathbb{R}^m$ aberto contendo a e $\phi: V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, com $\phi(a) = b$ e tal que

$$f^{-1}(c) \cap Z$$

é o gráfico de ϕ.

Demonstração. Fazer. □

Corolário. *Nas condições do teorema acima, $T_p(f^{-1}(c))$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{m+n}$ de dimensão m. Em particular, $T_p(f^{-1}(c)) = \ker(Df(x))$.*

Demonstração. Fazer. □

Método do Multiplicador de Lagrange. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, $f: U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, $p \in U$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$. Seja $g: U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $p \in f^{-1}(c)$ úm ponto extremo local da restrição de g ao conjunto $f^{-1}(c)$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$.*

Demonstração. É fácil ver que $Dg(p)v = 0$ para todo $v \in T_p(f^{-1}(c))$. pelo corolário acima, $\ker(Df(p)) \subset \ker(Dg(p))$ e, portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$. □

Exemplo. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ e seja $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$. Dado $a \in R$ positivo, sejam $I = [0, a] \times \ldots [0, a]$ o cubo em $\mathbb{R}^n$ de arestas $[0, a]$, e $p \in I$ o ponto de máximo da restrição de g a $I \cap f^{-1}(a)$. Como g vale zero na fronteira de I, temos que p está no interior de I. Pelo método do multiplicador de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla g(x) = \lambda \nabla f(x)$, isto é, $p = (\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$. Concluímos que, dados $x_1, \ldots, x_n$ números reais positivos,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

e, vale a igualdade, sss $x_1 = \cdots = x_n$.

Falar sobre o espaço tangente $T_p f^{-1}(c)$. Comentário sobre o método do multiplicador de Lagrange.

11. Superfícies de classe C^k

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Uma apicação $f\colon M \to \mathbb{R}^q$ é dita *diferenciável de classe* $\mathcal{C}^k$) se: para cada ponto $x \in M$, existem $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto que contém x e $F\colon U \to \mathbb{R}^q$ diferenciável de classe $\mathcal{C}^k$ tais que $F_{|U\cap M} = f_{U\cap M}$.

Propriedades.

1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Nesse caso, a aplicação identidade $M \to M$ é uma aplicação de classe C^∞.

2. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ subconjuntos. Se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to \mathbb{R}^m$ são aplicações de classe C^k, então $g \circ f\colon M \to \mathbb{R}^q$ é uma aplicação de classe C^k.

Definição 11.0.1. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ subconjuntos. Dizemos que M é C^k-*difeomorfa a* N se existe uma aplicação de classe C^k $M \to N$ com inversa $N \to M$ também de classe C^k.

Exemplos.

1. A esfera $\mathbb{S}^2$ é C^∞-difeomorfa ao elipsóide $\{(x,y,z) \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1\}$ com $a,b,c > 0$.

2. Para qualquer $x \in \mathbb{S}^n$, tem-se que $\mathbb{S}^n \setminus x$ é C^∞-difeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

3. Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se que $\mathbb{R}^n \setminus x$ é C^∞-difeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

4. $\mathbb{S}^2$ não é difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

5. $\mathbb{R}$ não é difeomorfo a $\{(x,y) \mid x^2 = y^3\}$.

6. O gráfico $z = \sqrt{x^2+y^2}$ não é difeomorfo ao gráfico $z = x^2+y^2$.

Em muito breve, voltaremos para justificar a maior parte das afirmações acima.

Definição 11.0.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que M é uma *superfície de classe* C^k *e de dimensão* m se: para cada $x \in N$ existe um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, contendo x, tal que $U \cap M$ é difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^m$. Nesse caso, denotamos $\dim M = m$.

Exemplos e propriedades.

1. Subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^k$ são superfícies de classe C^∞ e de dimensão k.

2. $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é superfície de classe C^∞ e de dimensão n.

3. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ subconjuntos. Se M é C^k-difeomorfo a N, então M é superfície de classe C^k se, e somente se, N o é.

4. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ sãosuperfícies de classe C^k, então $M \times N$ é uma superfície de classe C^k e de dimensão $\dim M + \dim N$.

5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Se $f\colon M \to \mathbb{R}^q$ é uma aplicação de classe C^k, então o gráfico de f é C^k-difeomorfo a M. Em particular, se M é superfície de classe C^k e de dimensão m, o gráfico de f também o é.

A aplicação derivada

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e seja $f\colon M \to \mathbb{R}^q$ uma aplicação de classe C^k. Para cada $x \in M$, objetivamos definir a *derivada* de f em x (denotada por $d_x f$). Sabemos que existem $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto que contém x e $F\colon U \to \mathbb{R}^k$ diferenciável de classe $\mathcal{C}^k$ tais que $F_{|U\cap M} = f_{U\cap M}$. Assim, naturalmente, veremos $d_x f$ como uma restrição da aplicação linear $d_x F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a algum subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A seguir, veremos o domínio natural para $d_x f$.

Espços tangentes

$$T_x M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \gamma'(0);\ \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ e } \gamma(0) = x\}.$$

O conjunto $T_x M$, definido acima, é conhecido como *o espaço tangente* a M no ponto x.

Exemplos

1. Se $U \subset \mathbb{R}^k$ é um subconjunto aberto, então $T_x U = \mathbb{R}^k$.

2. Veremos que $T_x \mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \ \ < v, x >= 0\}$.

3. $T_{(0,0)}\{x^2 = y^3\}$ é igual ao ponto $\{(0,0)\}$.

4. $T_{(0,0,0)}\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ é o ponto $(0,0,0)$.

Então, dizemos que a *derivada* de f no ponto $x \in M$ é a aplicação

$$d_x f\colon T_x M \to \mathbb{R}^q$$

dada pela restrição de $d_x F$ a $T_x M$. Vale observar que a definição dada independe da esolha da função F.

Proposição 11.1 (Regra da Cadeia)**.** $d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f$.

Proposição 11.2. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ subconjuntos. Se $f\colon M \to N$ é um difeomorfismo de classe C^k com inversa $g\colon N \to M$, então, para cada $x \in M$ com $y = f(x)$, tem-se que:*

$$d_x f(T_x M) = T_y N \text{ e } d_y g(T_y N) = T_x M.$$

Proposição 11.3. *Para toda superfície de classe C^k $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m, tem-se que $\forall\ x \in M$ $T_x M \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de dimensão m.*

Como algumas aplicações da última proposição citada acima, vê-se que $x^2 = y^3$ não é difeomorfo a $\mathbb{R}$, pois $T_{(0,0)}\{x^2 = y^3\}$ é igual ao ponto $\{(0,0)\}$ enquanto $T_x\mathbb{R} = \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Também, vê-se que $\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ não é difeomorfo a $\{z = x^2 + y^2\}$, pois $T_{(0,0,0)}\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ é o ponto $(0,0,0)$ enquanto $T_p\{z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial 2-dimensional para todo ponto p no conjunto.

12. Conjuntos no $\mathbb{R}^n$ de medida nula

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem *medida n-dimensional nula* se para cada $\epsilon > 0$ existem retângulos abertos $R_1, \ldots, R_k, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ tais que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} vol_n(R_k) < \epsilon.$$

Observação. Obtemos uma definição equivalente à definição acima se substituirmos a palavra retângulos por cubos e\ou a palavra abertos por fechados (c.f. Livro Texto).

Proposição. *Sejam $X_1, \ldots, X_k, \ldots$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de medida n-dimensional nula. Então, $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ tem medida n-dimensional nula.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $R_1^k, \ldots, R_i^k, \ldots$ cobertura de X_k por retângulos tais que $\sum_{i=1}^{\infty} vol_n(R_i^k) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Então, $\{R_i^k\}_{i,k \in \mathbb{N}}$ é cobertura de X por retângulos tais que $\sum_{k,i=1}^{\infty} vol_n(R_i^k) < \epsilon$ $\square$

Exemplos.

- Todo $X \subset \mathbb{R}^n$ enumerável tem medida n-dimensional nula.

- Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ com medida n-dimensional nula, $X \times \mathbb{R}^m$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^{m+n}$ com medida $(m+n)$-dimensional nula. Em particular, $X \times Y$ tem medida $(m+n)$-dimensional nula para todo $Y \subset \mathbb{R}^m$.

Demonstração. $Q = \{q_1, \ldots, q_k, \ldots\} \subset \mathbb{R}^m$ subconjunto denso. Para cada k, seja $B_k \subset \mathbb{R}^m$ um cubo com centro em q_k e aresta de comprimento 1, em particular $vol_m(B_k) = 1$. Também, para cada k, seja $X_k = X \times B_k$. Agora, dado $\epsilon > 0$, sejam $R_1, \ldots, R_i, \ldots$ retângulos abertos em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} vol_n(R_i) < \epsilon.$$

Assim, para cada k, temos retângulos abertos $R_1 \times B_k, \ldots, R_i \times B_k \ldots$ em $\mathbb{R}^{m+n}$ tais que

$$X \times B_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \times B_k \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} vol_{m+n}(R_i \times B_k) < \epsilon.$$

Concluímos que $X \times B_k$ tem medida $(m+n)$-dimensional nula, para todo $k \in \mathbb{N}$. Desde que

$$X \times \mathbb{R}^m = \bigcup_{k=1}^{\infty} X \times B_k,$$

obtemos o desejado. □

Proposição 12.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ um subconjunto fechado. Para cada $t \in R$, seja $X_t := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (x,t) \in X\}$. Se $X_t \subset \mathbb{R}^n$ tem medida n-dimensional nula, para todo $t \in \mathbb{R}$, então $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tem medida $(n+1)$-dimensional nula.*

Demonstração. É suficiente considerarmos X compacto. Como X é compacto, existem $a < b$ tais que $X \subset \mathbb{R}^n \times [a,b]$. Agora, fixado $t \in [a,b]$ e fixado $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo X_t, existe $\epsilon > 0$ tal que $X \cap [\mathbb{R}^n \times (t-\epsilon, t+\epsilon)] \subset A \times (t-\epsilon, t+\epsilon)$. De fato, caso contrário, teríamos uma seq. $t_i \to t$ e, utilizando a compacidade de X, teríamos uma seq. $x_i \to x$ com $x \in X_t$; $x_i \notin A$ para todo i. Desde que $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, $x \notin A$. O que contradiz $X_t \subset A$.

Dado $\epsilon > 0$, para cada $t \in [a,b]$, sejam $R_1^t, \ldots, R_i^t \ldots$ retângulos abertos em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$X_t \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i^t \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} vol_n(R_i^t) < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Pelo que vimos acima, existe um intervalo aberto $I_t \subset \mathbb{R}$ com centro em t tal que $X \cap (\mathbb{R}^n \times I_t) \subset A_t \times I_t$ em que $A_t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i^t$. Seja $P \ : a = t_0 < \cdots < t_l = b$ uma partição de comprimento $|P|$ menor do que o número de Lebesgue da cobertura acima de $[a,b]$. Assim, para cada $i = 1, \ldots, l-1$, existe $s_i \in [a,b]$ tal que

$$X \cap (\mathbb{R}^n \times [t_i, t_{i+1}]) \subset A_{s_i} \times [t_i, t_{i+1}].$$

Assim

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{l-1} \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^{s_i} \times [t_i, t_{i+1}] \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{k=1}^{\infty} vol_{n+1}(R_k^{s_i} \times [t_i, t_{i+1}]) < \epsilon.$$

□

- Todo subespaço afim de $\mathbb{R}^n$, diferente de $\mathbb{R}^n$, tem medida n-dimensional nula.

Demonstração. É suficiente provar que todo subespaço afim $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de dimensão n tem medida nula. Faremos isso por indução sobre n. Desde que todo ponto $x \in \mathbb{R}$ define um subconjunto com medida 1-dimensional nula, o resultado vale para $n = 0$. Seja n um interio positivo. Assuma que o resultado valha para inteiros menores do que n. Seja $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um subespaço afim de dimensão n. Logo existe $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação afim tal que $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é o gráfico de f. Portanto, $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (x,t) \in A\}$ é o subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ definido por $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = t\}$. Por hipótese de indução, A_t tem medida nula para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo que vimos acima, qualquer parte compacta de A tem medida nula e, portanto, A tem medida nula. □

Proposição. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação Liscphitz. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula, então $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula.*

Demonstração. Seja $x \in X$ e seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cubo aberto de aresta N e contendo x. Sendo c constante de Lipschitz de f, temos $f(X \cap K)$ contido em um cubo aberto $\tilde{K}$ em $\mathbb{R}^n$ de aresta $c\sqrt{n}N$ (portanto $vol_n(\tilde{K}) \leq [c\sqrt{n}N]^n$). Em particular, temos uma constante $\alpha = [c\sqrt{n}]^n$ independente de K tal que $vol_n(\tilde{K}) \leq \alpha vol_n(K)$. Agora, dado $\epsilon > 0$, sejam $K_1, \ldots, K_i, \ldots$ cubos abertos tais que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} vol_n(K_i) < \frac{\epsilon}{\alpha}.$$

Seja $J \subset \mathbb{N}$ tal que $i \in J$ se, e somente se, K_i intersecta X. Então,

$$f(X) \subset \bigcup_{i \in J} \tilde{K}_i$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} vol_n(\tilde{K}_i) &\leq \alpha \sum_{i \in J} vol_n(K_i) \\ &\leq \alpha \sum_{i=1}^{\infty} vol_n(K_i) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação localmente Liscphitz. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula, então $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula.*

Corolário. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula, então $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula.*

Corolário. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação localmente Liscphitz. Se $m < n$, então $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula.*

Corolário. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um superfície Lipschitz de dimensão menor do que n. Então, $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida m-dimensional nula.*

13. Teorema de Sard

O objetivo desta seção é apresentar uma prova do Teorema de Sard, o qual enunciamos a seguir.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f: U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $x \in U$ é chamado *ponto singular de* f se a aplicação linear $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ não é sobrejetora. O subconjunto de U formado pelos pontos singulares de f é denotado por $Sing(f)$.

Teorema de Sard. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f: U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^∞. Então, $f(Sing(f)) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida m-dimensional nula.*

Antes de iniciarmos uma prova do Teorema de Sard enunciado acima, vejamos uma prova da sua versão mais simples (versão em uma variável real) enunciada e provada abaixo.

Lembramos que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}$ é dito de *medida nula* quando para cada $\epsilon > 0$ existe uma família de intervalos $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tais que $M \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \epsilon$, em que $|I_j|$ denota o comprimento do intervalo I_j.

Usaremos que uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula ainda é um conjunto de medida nula; resultado visto na seção anterior para um contexto mais geral ainda, a saber, para subconjuntos de $\mathbb{R}^m$.

Teorema de Sard versão baby. *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Seja $C_f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f'(x) = 0\}$. Então, $f(C_f)$ tem medida nula.*

Demonstração. Seja $K_n = [-n, n]$; $n \in \mathbb{N}$. O objetivo é mostrar que $f(K_n \cap C_f)$ é um conjunto de medida nula. Pela fórmula de Taylor, existe uma contante $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|^2$$

para quaisquer $x \in K_n$ e $a \in K_n \cap C_f$. Agora, para cada inteiro $A > 0$, considere uma partição de K_n em subintervalos de comprimento $\dfrac{2n}{A}$. Seja J um desses subintervalos; $J \cap C_f \neq \emptyset$. Pela desigualdade acima, o comprimento de $f(J)$ não supera $M\dfrac{8n^2}{A^2}$. Desde que existem não mais do que A desses subintervalos, conclui-se que $f(K_n \cap C_f)$ está contido em uma reunião finita de intervalos cuja a soma dos seus comprimentos não supera $\dfrac{8Mn^2}{A}$.

Fazendo $A \to +\infty$, conclui-se que $f(K_n \cap C_f)$ é um conjunto de medida nula. Finalmente, desde que

$$f(C_f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(K_n \cap C_f),$$

o teorema está provado. $\square$

Prova do Teorema de Sard. Consideremos a seguinte notação: $A^r(f)$ é o subconjunto de U formado pelos pontos $x \in U$ tais que todas as derivadas paraciais de f, de ordem até r, se anulam em x.

Observe que

$$Sing(f) \supset A^1(f) \supset \cdots \supset A^r(f) \supset \cdots.$$

`Afirmação 1.` Se $m(r+1) > n$, então $f(A^r(f)) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida m-dimensional nula.

`Afirmação 2.` $f(A^1(f)) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida m-dimensional nula.

Antes de provarmos as afirmações acima, mostaremos como utilizá-las para concluir uma prova do Teorema de Sard.

Seja $P(r) \subset U$ formado pelos pontos $x \in U$ em que $Df(x)$ tem posto $0 \leq r < m$. Nosso problema está reduzido a mostrar que: para cada $a \in P(r)$ existe uma bola $B = B(a, \epsilon)$ tal que $f(P(r) \cap B) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida m-dimensional nula. Pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos $V \subset U$ contendo a, $W \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ contendo b e um difeomorfismo de classe C^∞ $\phi \colon W \to V$ tal que $f \circ \phi(t, y) = (t, g(t, y))$ para todo $(t, y) \in W$. Denotando por W_t o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^{n-r}$ tais que $(t, y) \in W$, temos uma aplicação de classe C^∞

$$g_t \colon W_t \to \mathbb{R}^{m-r}$$

definida por $(g_t(y) = g(t, y))$. Daqui por diante, troquemos V por uma bola compacta centrada em a. Agora, observe que $x \in V \cap P(r)$ (com $\phi(t, y) = x$) se, e somente se, as derivadas parciais, de ordem 1, da aplicação g_t com respeito às variáveis $y_1, \ldots, y_{n-r}$ se anulam em y, ou seja, se, e somente se, $y \in A^1(g_t)$ (em particular $P(r) \cap V$ é compacto). Portanto, o conjunto compacto $f(V \cap P(r))$ é formado pelos pontos $(t, z) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ tais que $z \in g_t(A^1(g_t))$. Por outro lado, pela Afirmação 2, temos que cada $g_t(A^1(g_t)) \subset \mathbb{R}^{m-r}$ tem medida $(m-r)$-dimensional nula e, pela Proposição 12.1, segue que $f(V \cap P(r)) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida m-dimensional nula.

Prova da Afirmação 1. É suficiente provar que para cada cubo fechado $K \subset U$, $f(A^r(f) \cap K) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida m-dimensional nula.

Exercício. Existe uma constante positiva $c > 0$ tal que para todo $x \in K \cap A^r(f)$ e todo $y \in K$, tem-se

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|^{r+1}.$$

Seja l o comprimento da aresta de K. Consideremos uma partição de K em N^n cubos $K_1, \ldots, K_{N^n}$ de arestas de comprimento $\dfrac{l}{N}$ e seja J o subconjunto de $\{1, \ldots, N\}$ formado pelos índices $i's$ tais K_i intersecta $A^r(f)$. Portanto, dados $x, y \in K_i$; $i \in J$, tem-se

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2^{r+1} c [\frac{l\sqrt{n}}{N}]^{r+1}.$$

Assim, $f(K_i)$ está contido em um cubo m-dimensional $C_i \subset \mathbb{R}^m$ de aresta no máximo $\tilde{c}(\frac{l}{N})^{r+1}$, em que $\tilde{c}$ independe de N, em particular,

$$vol_m(C_i) \leq \tilde{c}(\frac{l}{N})^{m(r+1)}$$

e

$$\sum_{i\in J} vol_m(C_i) \leq \tilde{c}l^{m(r+1)}N^{n-m(r+1)}.$$

Desde que $n - m(r+1) < 0$, temos que $f(K \cap A^r(f)) \subset \mathbb{R}^m$ tem medida m-dimensional nula.

Prova da Afirmação 2. Podemos escrever

$$A^1(f) = [\bigcup_{k=0}^{r-1} C^k(f)] \cup A^r(f) \text{ em que } C^k(f) = A^k(f) - A^{k+1}(f).$$

Seja $x \in C^k(f)$. Assim existe uma derivada parcial de f de ordem k, digamos D^k, tal que $\dfrac{\partial D^k}{\partial x_i}(x) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $i = 1$. Seja $U\colon \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(x) = (D^k(x), x_2, \ldots, x_n)$. Pelo Teorema da Função Inversa, podemos diminuir o aberto U, de sorte que h seja um difeomorfismo sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo $h(x)$. Seja g a restrição de $f \circ h^{-1}$ a $V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$. Veja que

$$h(C^k(f) \cap U) \subset Sing(g)$$

e, portanto,

$$f(C^k(f) \cap U) \subset g(Sing(g))$$

que, por indução sobre n, tem medida nula. $\square$

14. Funções integráveis e o Teorema de Lebesgue

Notação: Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função limitada, denotemos

$$M(f, X) = \sup\{f(x) \ : \ x \in X\} \text{ e } \ m(f, X) = \inf\{f(x) \ : \ x \in X\}.$$

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo (n-dimensional) fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para cada partição P de A, sejam

$$S(f, P) = \sum_{R \in P} M(f, R) \cdot vol_n(R) \text{ e } s(f, P) = \sum_{R \in P} M(f, R) \cdot vol_n(R).$$

Para quaisquer $P \subset Q$ partições de A, as desigualdades abaixo são satisfeitas:

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P).$$

Demonstração. Fazer. □

Definimos

$$\underline{\int_A} f(x)dx = \sup\{s(f, P) \ : \ P \text{ é partição de } A\}$$

e

$$\overline{\int_A} f(x)dx = \inf\{S(f, P) \ : \ P \text{ é partição de } A\}.$$

Desde que $s(f, P) \leq S(f, P)$ para toda partição de A, temos que

$$\underline{\int_A} f(x)dx \leq \overline{\int_A} f(x)dx.$$

Quando as quantidades acima coincidem dizemos que $f\colon A \to \mathbb{R}$ é *integrável* e denotamos aquele valor por

$$\int_A f(x)dx.$$

Exemplos

- $A \subset \mathbb{R}^n$ retângulo fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ constante igual a c. Nesse caso, $f\colon A \to \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_A f(x)dx = c \cdot vol_n(A).$$

- $A \subset \mathbb{R}^n$ retângulo fechado. Toda função contínua $f\colon A \to \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração. Para mostrar que

$$\underline{\int_A} f(x)dx = \overline{\int_A} f(x)dx$$

é suficiente mostrar que: dado $\epsilon > 0$, temos

$$\overline{\int_A} f(x)dx - \underline{\int_A} f(x)dx < \epsilon.$$

Para tanto, seja $\epsilon > 0$. Como $f\colon A \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in A \text{ e } \|x - y\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{vol_(A)}.$$

Então, consideremos P uma partição de A tal lque o diâmetro de cada retângulo em P é menor do que δ, em particular,

$$M(f, R) - m(f, R) < \frac{\epsilon}{vol_n(A)}$$

para cada $R \in P$. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{\int_A} f(x)dx - \underline{\int_A} f(x)dx &\leq S(f, P) - s(f, P) \\
&= \sum_{R \in P} [M(f, R) - m(f, R)] \cdot vol_n(R) \\
&< \frac{\epsilon}{vol_n(A)} \sum_{R \in P} vol_n(R) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

□

- Seja $A = [0,1] \times [0,1]$. A função $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x, y) = 1$ se $x \notin \mathbb{Q}$ não é integrável.

Teorema de Lebesgue. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável se, e somente se, o conjunto $D_f = \{x \in A : f \text{ não é contínua em } x\}$ tem medida n-dimensional nula.*

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dado $x \in X$, para cada $\delta > 0$ seja

$$O(f, x, \delta) = M(f, X \cap B(x, \delta)) - m(f, X \cap B(x, \delta)).$$

Desde que $\delta_1 < \delta_2$ implica $O(f, x, \delta_1) < O(f, x, \delta_2)$, existe

$$o(f, x) = \lim_{\delta \to 0^+} O(f, x, \delta).$$

Proposição. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dado $x \in X$, f é contínua em x, se e somente se, $o(f, x) = 0$.*

Prova do Teorema de Lebesgue. Consideremos D_f com medida n-dimensional nula. Dado $\epsilon > 0$, sejam $R_1, \ldots, R_k, \ldots \mathbb{R}^n$ retângulos abertos tais que

$$D_f \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} vol_n(R_k) < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$$

em que $M = \sup(f)$ e $m = \inf(f)$ em A. Para cada $x \in A - D_f$ seja S_x um retângulo aberto contendo x tal que

$$M(f, S_x) - m(f, S_x) < \frac{\epsilon}{2vol_n(A)}.$$

Seja P uma partição de A tal que cada retângulo $B \in P$ tem diâmetro menor do que o número de Lebesgue da cobertura

$$A \subset [\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k] \cup [\bigcup_{x \in A - D_f} S_x].$$

Seja F_1 o subconjunto de P formado pelos retângulos de P que estão contidos em algum R_k e F_2 o subconjunto de P formado pelos retângulos de P que não pertencem a F_1. Vale observar que, pela definição de P, cada retângulo de F_2 está contido em algum S_x. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{\int_A} f(x)dx - \underline{\int_A} f(x)dx &\leq S(f,P) - s(f,P) \\
&= \sum_{R \in P} [M(f,R) - m(f,R)] \cdot vol_n(R) \\
&= \sum_{R \in F_1} [M(f,R) - m(f,R)] \cdot vol_n(R) \\
&+ \sum_{R \in F_2} [M(f,R) - m(f,R)] \cdot vol_n(R) \\
&\leq (M-m) \sum_{R \in F_1} vol_n(R) + \frac{\epsilon}{2vol_n(A)} \sum_{R \in F_2} vol_n(R) \\
&< (M-m) \frac{\epsilon}{2(M-m)} + \frac{\epsilon}{2vol_n(A)} vol_n(A) \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

donde f é integrável.

Reciprocamente, suponhamos que f seja integrável. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$D_k = \{x \in A \ : \ o(f,x) \geq \frac{1}{k}\}.$$

Obviamente,

$$D_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k,$$

e, para mostrar que D_f tem medida n-dimensional nula, é suficiente mostrar que cada D_k tem medida n-dimensional nula. Para tanto, fixado D_k, seja P partição de A tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \frac{\epsilon}{k}.$$

Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ formado pela reunião das fronteiras ∂R; $R \in P$. Seja $R' \subset \mathbb{R}^n$ retângulo aberto definido por $int(R)$. Seja F formado pelos retângulos $R \in P$ tais que R' intersecta D_k. Assim,

$$D_k \subset [\bigcup_{R \in F} R'] \cup Y$$

e, para todo $R \in F$, tem-se $M(f, R') - m(f, R') \geq \frac{1}{k}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \sum_{R \in F} vol_n(R') &= \frac{1}{k} \sum_{R \in F} vol_n(R) \\
&< \sum_{R \in F} M(f, R') - m(f, R') \cdot vol_n(R) \\
&\leq \sum_{R \in F} M(f, R) - m(f, R) \cdot vol_n(R) \\
&\leq \sum_{R \in P} M(f, R) - m(f, R) \cdot vol_n(R) \\
&= S(f, P) - s(f, P) \\
&< \frac{\epsilon}{k},
\end{aligned}$$

e, portanto, $\sum_{R \in F} vol_n(R') < \epsilon$. Desde que $Y \subset \mathbb{R}^n$ tem medida n-dimensional nula, recebemos que D_k tem medida n-dimensional nula. $\square$

Lista de Exercícios 1

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Se para cada $\epsilon > 0$ existem $Y \subset \mathbb{R}^n$ com medida n-dimensional nula e $R_1, \ldots, R_k, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ retângulos abertos tais que
$$X \subset [\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k] \cup Y \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} vol_n(R_k) < \epsilon,$$
então $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida n-dimensional nula.

2. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P de A tal que
$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

3. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Mostre que:
   a) Para cada constante $c \in \mathbb{R}$, a função $f + cg$ é integrável e
   $$\int_A (f+cg)(x)dx = \int_A f(x)dx + c\int_A g(x)dx;$$
   b) $f \cdot g$ é integrável;
   c) Se $|g(x)| \geq c > 0$, para todo $x \in A$, então $\frac{1}{g}$ é integrável.

4. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, então $\int_A f(x)dx \geq 0$.

5. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que $|f|$ é integrável e
$$|\int_A f(x)dx| \leq \int_A |f(x)|dx.$$

6. Sendo f e g funções tais que $g \circ f$ faz sentido. Mostre que $D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g)$.

7. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(A) \subset [a,b]$. Então, $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável.

8. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ retângulos fechados, $g : B \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $f : A \to B$ uma função contínua tal que existe $c > 0$ satisfazendo $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$, para todos $x, y \in A$. Mostre que $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável.

15. Conjuntos Jordan Mensuráveis

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Seja $\xi_X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função definida por $\xi(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi(x) = 0$ se $x \notin X$. ξ_X é chamada a *função característica de* X.

Dizemos que um subconjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é *Jordan mensurável* quando existe um retângulo fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset A$ e a restrição da função característica de X ao retângulo A (a qual denotamos também por ξ_X) é integrável. Nesse caso, definimos o *volume n-dimensional de* X por

$$vol_n(X) = \int_A \xi_X(x)dx.$$

Boa definição do volume de X.

Para mostrar que o volume de X está bem definido, consideremos outro retângulo fechado $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset B$. Agora, seja $C \subset \mathbb{R}^n$ retângulo fechado tal que $A, B \subset C$. Afirmamos que

$$\int_A \xi_X(x)dx = \int_C \xi_X(x)dx = \int_B \xi_X(x)dx.$$

De fato, primeiro veja que: para calcular $\int_C \xi_X(x)dx$, é suficiente calcular somas superiores $S(\xi_X, P)$ em que P é partição de C que refina partição P_A de A (respectivamente P_B de B). E, como $\xi_X = 0$ fora de A (respectivamente de B), tem-se $S(\xi_X, P) = S(\xi_X, P_A)$ (respectivamente $S(\xi_X, P) = S(\xi_X, P_B)$.)

Segue da prova acima que Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é Jordan mensurável, então $\xi_X\colon A \to \mathbb{R}$ é integrável para qualquer retângulo fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset A$.

Proposição. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado. Então, X é Jordan mensurvél se, e somente se, a fronteira de X, $\partial X \subset \mathbb{R}^n$, tem medida n-dimensional nula.*

Demonstração. É bastante observar que o conjunto dos pontos de descontinuidade da função característica de X coincide com a fronteira de X. □

Proposição.*Se $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ são Jordan mensuráveis, então $X \cup Y$, $X \cap Y$, e $X - Y$ são Jordan mensuráveis e*

$$vol_n(X \cup Y) = vol_n(X) + vol_n(Y) - vol_n(X \cap Y).$$

Demonstração. é suficiente observar que

$$\xi_{X\cup Y} = \xi_X + \xi_Y - \xi_{X\cap Y} \quad \text{e} \quad \xi_{X\cap Y} = \xi_X \cdot \xi_Y.$$

□

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto mensurável. Dada uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$, dizemos que f é *integrável* quando existe um retângulo fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x \subset A$ e a função $f \cdot \xi_X\colon A \to \mathbb{R}$ é integrável. Nesse caso, denotamos

$$\int_X f(x)dx = \int_A (f \cdot \xi_X)(x)d(x).$$

Exercício. Mostre que a integral acima independe do retângulo A escolhido.

Teorema de Lebesgue. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ Jordan mensurável. Uma função limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, o conjunto $\{x \in X \ : f \text{ não é contínua em } \ x\}$ tem medida n-dimensional nula.*

Demonstração. $\square$

Abaixo, destacamos uma regra operacional para cálculo de integrais sobre retângulos fechados.

Integral Iterada. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ retângulos fechados. Seja $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, as funções $A \to \mathbb{R}$ definidas por

$$x \mapsto \underline{\int_B} f(x,y)dy \quad \text{e} \quad x \mapsto \overline{\int_B} f(x,y)dy$$

são integráveis e

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A [\underline{\int_B} f(x,y)dy]dx = \int_A [\overline{\int_B} f(x,y)dy]dx.$$

Lista de Exercícios 2

1. Calcule $\int_X e^{-y^2}$ em que $X \subset \mathbb{R}^2$ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$.

2. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto Jordan mensurável. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ tem interior vazio, então X tem medida n-dimensional nula.

3. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto Jordan mensurável. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e $\int_X f(x)dx = 0$, então $\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}$ tem medida n-dimensional nula.

4. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Se $R \subset A$ é um retângulo fechado e tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A - R$, então $\int_A f(x)dx = \int_R f(x)dx$.

5. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ Jordan mensuráveis. Sejam $R \subset \mathbb{R}^n$ retângulo fechado e $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tais que $A, B \subset R \times [a,b]$. Se

$$A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (x,t) \in A\} \ \text{ e } \ B_t = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (x,t) \in B\}$$

têm o mesmo volume n-dimensional para todo $t \in [a,b]$, então $vol_{n+1}(A) = vol_{n+1}(B)$.

6. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto Jordan mensurável. Dada uma função integrável $f\colon X \to \mathbb{R}$ com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, mostre que $C(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ x \in X \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$ é Jordan mensurável e $vol_{n+1}(C(f)) = \int_X f(x)dx$.

7. Seja $X \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Calcule $vol_3(X)$.

8. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ Jordan mensuráveis. Dada $f\colon X \cup Y \to \mathbb{R}$ integrável, mostre que

$$\int_{X\cup Y} f(x)dx = \int_X f(x)dx + \int_Y f(x)dx - \int_{X\cap Y} f(x)dx.$$

9. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ Jordan mensurável. X tem medida n-dimensional nula se, e somente se, toda função limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$ é integrável com $\int_X f(x)dx = 0$.

10. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ Jordan mensurável e seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado tal que $X \subset A$. Seja P uma partição de A; $R_1, \ldots, R_k$ são os blocos de P. Mostre que

$$vol_n(X) = vol_n(R_1 \cap X) + \cdots + vol_n(R_k \cap X).$$

De uma forma mais geral, mostre que para toda função integrável $f\colon X \to \mathbb{R}$, vale:

$$\int_X f(x)dx = \int_{R_1\cap X} f(x)dx + \cdots + \int_{R_k\cap X} f(x)dx.$$

11. Prove o Teorema de Green para retângulos em $\mathbb{R}^2$.

12. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ Jordan mensurável e $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Mostre que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, a função $f + \lambda g\colon X \to \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_X (f + \lambda g)(x)dx = \int_X f(x)dx + \lambda \int_X g(x)dx.$$

13. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ Jordan mensurável e $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Mostre que

$$|\int_X f(x)g(x)dx| \leq \left(\int_X f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

14. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Jordan mensurável conexo e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $x_0 \in X$ tal que

$$\int_X f(x)dx = f(x_0) \cdot vol_n(X).$$

16. Mudança de variáveis

Teorema. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos e $h\colon U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1. Seja $X \subset U$ um subconjunto compacto e Jordan mensurável. Se $f\colon h(X) \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, então*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X (f \circ h)(x) \cdot |\det Jh(x)| dx.$$

Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos. Um difeomorfismo de classe C^1 $h\colon U \to V$ é dito *admissível* se: para cada subconjunto compacto e Jordan mensurável $X \subset U$, tem-se

$$vol_n(h(X)) = \int_X |\det Jh(x)| dx.$$

Proposição 1. *O teorema acima é verdadeiro quando $h\colon U \to V$ é um difeomorfismo admissível.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado tal que $h(X) \subset A$. Assim,

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_A (f \cdot \xi_h)(y)dy$$

em que ξ_h é a função característica de $h(X)$. Seja $\delta > 0$ menor do que a distância de $h(X)$ a $\mathbb{R}^n - V$. Agora, dada uma partição P de A, tal que cada retângulo de P tem diâmetro menor do que δ, tem-se que os retângulos de P que intersectam $h(X)$ estão contidos em V. Seja $Q \subset P$ formado pelos retângulos que intersectam $h(X)$. Então,

$$\begin{aligned}
s(f \cdot \xi_h, P) &= \sum_{R \in P} m(f \cdot \xi_h, R) \cdot vol_n(R) \\
&= \sum_{R \in Q} m(f \cdot \xi_h, R) \cdot vol_n(R) \\
&= \sum_{R \in Q} m(f \cdot \xi_h, R) \cdot \int_{h^{-1}(R)} |\det Jh(x)| dx \\
&\leq \sum_{R \in Q} \int_{h^{-1}(R)} [(f \circ h) \cdot \xi_X](x) |\det Jh(x)| dx \\
&= \sum_{R \in Q} \int_{h^{-1}(R) \cap X} (f \circ h)(x) |\det Jh(x)| dx \\
&= \int_X (f \circ h)(x) |\det Jh(x)| dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{h(X)} f(y)dy \leq \int_X (f \circ h)(x)|\det Jh(x)|dx.$$

analogamente, utilizando as somas superiores $S(f \cdot \xi_h, P)$; P é partição de A, mostra-se que

$$\int_{h(X)} f(y)dy \geq \int_X (f \circ h)(x)|\det Jh(x)|dx.$$

□

Escólio. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos. Um difeomorfismo de classe C^1 $h: U \to V$. Se para todo retângulo fechado $R \subset V$, tem-se*

$$vol_n(R) = \int_{h^{-1}(R)} |\det Jh(x)|dx,$$

então h é admissível.

Demonstração. Fazer. □

Corolário. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos. Se $h: U \to V$ é um difeomorfismo admissível, então $h^{-1}: U \to V$ é admissível.*

Demonstração. Seja $Y \subset V$ um subconjunto compacto e Jordan mensurável. Seja $X = h^{-1}(Y) \subset U$. Portanto, X é compacto e Jordan mensurável. Então, fazendo $f(y) = |\det Jh^{-1}(y)|$, temos

$$\begin{aligned} vol_n(X) &= \int_X 1 \cdot dx \\ &= \int_X |\det J(h^{-1} \circ h)(x)|dx \\ &= \int_X (f \circ h)(x) \cdot |\det Jh(x)|dx \\ &= \int_{h(X)} f(y)dy, \end{aligned}$$

isto é,

$$vol_n(h^{-1}(Y)) = \int_Y |\det Jh^{-1}(y)|dy.$$

□

Proposição 2. *Isomorfismos lineares $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidos por*

$$e_k \mapsto e_k \ , \ \forall k \notin \{i, j\} \ , \ e_i \mapsto e_j \ e \ e_j \mapsto e_i$$

são admissíveis.

Demonstração. Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo linear do tipo acima. Observe que $|\det JT(x)| = |\det T| = 1$ e para todo retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$, $T(R) \subset \mathbb{R}^n$ é um retângulo de mesmo volume. Vale observar também que o isomorfismo inverso T^{-1} é do mesmo tipo de T, de fato, $T^{-1} = T$. Então, precismamos provar que: para todo retângulo fechado $R \subset \mathbb{R}^n$, tem-se

$$vol_n(R) = \int_{T^{-1}(R)} |\det JT(x)|dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned} vol_n(R) &= vol_n(T^{-1}(R)) \\ &= \int_{T^{-1}(R)} 1 \cdot dx \\ &= \int_{T^{-1}(R)} |\det T|dx \\ &= \int_{T^{-1}(R)} |\det JT(x)|dx. \end{aligned}$$

□

Proposição 3. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos e $h: U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1. Se*

$$h(x) = (\phi(x), x_2, \ldots, x_n) \ \forall \ x \in U,$$

então h é admissível.

Prova corrigida. Seja $R \subset V$ um retângulo fechado. De acordo com o escólio acima, é bastante mostrar que

$$vol_n(R) = \int_{h^{-1}(R)} |\det Jh(x)|dx.$$

Para tanto, seja $X \subset U$ um subconjunto compacto e mensurável tal que $h(X) = R$, a saber, $X = h^{-1}(R)$. Escrevamos $R = J \times A$ com $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ é um retângulo fechado. Seja $x = (s, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Para cada $w \in A$, veja que

$$X_w = \{s \in \mathbb{R} \ : \ (s, w) \in X\}$$

é um intervalo difeomorfo ao intervalo J. De fato,

$$\phi_w: X_w \to J$$

definida por $\phi_w(s) = \phi(s, w)$ é um difeomorfismo, para todo $w \in A$, pois ${\phi_w}'(s) = |\det Jh(s, w)|$. Em particular,

$$\int_J dt = \int_{X_w} |Jh(s, w)|ds.$$

Agora, seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto tal que $X_w \subset I$ para todo $w \in A$ e, para cada $w \in A$, seja ξ_w a função característica de X_w. Então,

$$\int_J dt = \int_I (f_w \cdot \xi_w)(s)ds$$

em que $f_w(s) = |Jh(s,w)|$. Vale observar que f_w é contínua para todo $w \in A$. Finalmente, observando que $\xi(s,w) := \xi_w(s)$ é a função característica de X, obtemos:

$$\begin{aligned}
vol_n(R) &= \int_{J\times A} dtdw \\
&= \int_A [\int_J dt]dw \\
&= \int_A [\int_I (f_w \cdot \xi_w)(s)ds]dw \\
&= \int_{I\times A} (f \cdot \xi)(s,w)dsdw \\
&= \int_X |\det Jh(s,w)|dsdw \\
&= \int_{h^{-1}(R)} |\det Jh(x)|dx.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4. *A composição de difeomorfismos admissíveis ainda é um difeomorfismo admissível.*

Demonstração. □

Proposição 5. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos e $h: U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1. Se $H: U \times \mathbb{R} \to V \times \mathbb{R}$ definido por $H(x,t) = (h(x),t)$ é admissível, então h é admissível.*

Demonstração. Seja $R \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado. Seja $Y = R \times [0,1]$. Desde que H é admissível,

$$vol_{n+1}(Y) = \int_{H^{-1}(Y)} |\det JH(x,t)|dxdt.$$

Por outro lado, $vol_{n+1}(Y) = vol_n R$ e $H^{-1}(Y) = h^{-1}(R) \times [0,1]$, assim

$$\begin{aligned}
vol_n(R) &= vol_{n+1}(Y) \\
&= \int_{H^{-1}(Y)} |\det JH(x,t)|dxdt \\
&= \int_{h^{-1}(R)\times[0,1]} |\det Jh(x)|dxdt \\
&= \int_{h^{-1}(R)} |\det Jh(x)|dx.
\end{aligned}$$

□

Proposição 6. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos e $h: U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1. Para cada $x \in U$, existe um aberto $W \subset U$ contendo x; a restrição de h a W é um difeomorfismo admissível sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Pela proposição imediatamente anterior, podemos supor que

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_{n-1}(x), x_n)$$

Seja $x_0 \in U$. Desde que translações são (claramente) admissíveis, podemos supor que $h(x_0) = 0$. Mostremos que existe um difeomorfismo admissível g sobre um aberto $W \subset U$ contendo x_0 tal que

$$h \circ g(y) = (\tilde{h}_1(y), \dots, \tilde{h}_{n-2}(y), y_{n-1}, y_n).$$

De fato, como $\det Jh(x_0) \neq 0$, a menos de uma composição com um isomorfismo linear do tipo descrito na Proposição 2, podemos supor que

$$\frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x_0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função inversa, existe um difeomorfismo admissível g sobre um aberto $W \subset U$ contendo x_0 tal que

$$F \circ g(y) = y$$

em que $F(x) = (x_1, \dots, x_{n-2}, h_{n-1}(x), x_n)$. Portanto,

$$h \circ g(y) = (\tilde{h}_1(y), \dots, \tilde{h}_{n-2}(y), y_{n-1}, y_n).$$

Agora, utilizando indução sobre n e a Proposição 4, mostramos que existe um difeomorfismo admissível g sobre um aberto $W \subset U$ contendo x_0 tal que

$$h \circ g(y) = (y_1, \dots, y_n).$$

E, o resultado segue do corolário acima. $\square$

Proposição 7. *Todo difeomorfismo de classe C^1 entre abertos de $\mathbb{R}^n$ é admissível.*

Demonstração. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos e $h \colon U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1. Seja $X \subset U$ um subconjunto compacto e Jordan mensurável. Para cada $x \in U$ seja $W_x \subset U$ aberto contendo x tal que h é admissível quando restrita a W_x. Seja $\delta > 0$ número de Lebesgue da cobertura $X \subset \bigcup_{x \in X} W_x$. Seja P é partição de $\mathbb{R}^n$ em retângulos de diâmetro menor do que δ. Sejam $R_1, \dots, R_m$ os retângulos de P que intersectam X. Assim,

$$\begin{aligned} vol_n(h(X)) &= \sum_i vol_n(h(X \cap R_i)) \\ &= \sum_i \int_{X \cap R_i} |\det Jh(x)| dx \\ &= \int_X |\det Jh(x)| dx. \end{aligned}$$

$\square$

Prova do Teorema de Mudança de Variáveis. É suficiente recorrer à Proposição 1 e à Proposição 7. $\square$

17.

Até aqui, desenvolvemos uma teoria de cálculo diferencial e integral sobre espaços euclidianos. A partir de agora, objetivamos desenvolver uma teoria de cálculo diferencial e integral sobre espaços mais gerais do que aqueles, os quais são denominados variedades diferenciáveis.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f: X \to \mathbb{R}^m$ é dita *diferenciável* (de classe C^k) se para cada $x \in X$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo x e existe uma aplicação diferenciável (de classe C^k) $F: U \to \mathbb{R}^m$ tal que $F_{|X \cap U} = f$. Nesse caso, temos uma aplicação

$$Df(x): T_x X \to \mathbb{R}^m$$

definida pela restrição de $DF(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ao espaço tangente $T_x X$. Vale observar que $Df(x)$ não depende da extensão F escolhida.

Obs. Dado $X \subset \mathbb{R}^m$. Uma aplicação $f: X \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável (de classe C^k) sss é localmente diferenciável (de classe C^k).

Exercício. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ e $Z \subset \mathbb{R}^p$. Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ aplicações diferenciáveis. Então, a aplicação $g \circ f: X \to Z$ é diferenciável e, para cada $x \in X$, tem-se que

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

Problema. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f: X \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k; $k \geq 1$. Existem $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo X e uma aplicação $F: U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k tal que $F_{|X} = f$?

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Um *difeomorfismo de classe* C^k de X sobre Y é uma bijeção $f: X \to Y$ de classe C^k com inversa de classe C^k. Quando existe um tal difeomorfismo, dizemos que X é *difeomorfo* a Y.

Exemplos.

- A projeção estereogáfica é um difeomorfismo de classe C^∞ de $S^n - \{p\}$ sobre $\mathbb{R}^n$.

- As coordenadas polares definem um difeomorfismo de classe C^∞ de $S^n \times (0, \infty)$ sobre $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Nesse ponto, vale observar que, desde que a diferenciabilidade de aplicações definidas em $X \subset \mathbb{R}^m$ é uma propriedade local e se X é difeomorfo a um aberto de $A \subset \mathbb{R}^n$ então aplicações $f: X \to \mathbb{R}^p$ são diferenciáveis se, e somente se as aplicações $f \circ \phi: A \to \mathbb{R}^p$ definidas no aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis, é bastante natural considerar a seguinte classe de objetos abaixo.

$X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado uma *subvariedade diferenciável* (de classe C^k) se: para cada $x \in X$ existem uma aberto $U_x \subset \mathbb{R}^n$ contendo x e um difeomorfismo (de classe C^k) de $X \cap U_x$ sobre um subconjunto aberto $V_x \subset \mathbb{R}^m$. O inteiro m é chamado a *dimensão* de X e denotado por $dim(X)$. Os difeomorfismos $\phi\colon V_x \to U_x$ são chamados *parametrizações locais* de X.

Exemplos e Propriedades.

- Cada subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma n-dimensional subvariedade de classe C^∞.

- $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma n-dimensional subvariedade de classe C^∞.

- Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ são subvariedades de classe C^k, então $X \times Y$ é uma subvariedade de classe C^k. Além disso, $dim(X \times Y) = dim(X) + dim(Y)$.

- Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Se X é C^k difeomorfo a Y então X é uma subvariedade de classe C^k se, e somente se, Y é uma subvariedade de classe C^k.

Proposição. *$X \subset \mathbb{R}^n$ é uma m-dimensional subvariedade de classe C^k ($k \geq 1$) se, e somente se, para cada $x \in X$ existem $V_x \subset \mathbb{R}^m$ aberto e uma imersão de classe C^k $\phi\colon V_x \to X$ que é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto de X contendo x.*

Demonstração. Seja X uma m-dimensional subvariedade de classe C^k. Dado $x \in X$, sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo x, $f\colon U \cap X \to V$ difeomorfismo de classe C^k sobre o aberto $V \subset \mathbb{R}^m$. Se necessário, é possível diminuir o aberto U, de sorte que f seja a restrição de uma aplicação de classe C^k $F\colon U \to V$. Seja $\phi\colon V \to U \cap X$ a inversa de f. Desde que

$$F \circ \phi(z) = z \ \forall \ z \in V,$$

pela regra da cadeia, obtemos

$$DF(\phi(z)) \cdot D\phi(z) = Id_{\mathbb{R}^m} \ \forall \ z \in V.$$

Logo, o homeomorfismo $\phi\colon V \to U \cap X$ também é uma imersão de classe C^k.

Reciprocamente, seja $x \in X$ e sejam $V_x \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $\phi\colon V_x \to X$ uma imersão de classe C^k que é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto de X contendo x. Sejam $W \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo x e $\Phi\colon W \to \tilde{W}$ um difeomorfismo de classe C^k sobre um aberto $\tilde{W} \subset V_x$ tal que $\Phi \circ \phi(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ para todo $x \in \tilde{W}$. Sendo

$$\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$$

dada por $\pi(x, y) = x$, temos que a restrição de $\pi \circ \Phi$ a $X \cap W$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre o aberto $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

18.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Se para cada $x \in X$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo x tal que $U \cap X$ é uma m-dimensional subvariedade diferenciável (de classe C^k), então X é uma m-dimensional subvariedade diferenciável (de classe C^k).

Baseado no comentário acima, apresentaremos mais exemplos de subvariedades diferenciáveis.

- Dados $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f: U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k. O gráfico de f é C^k difeomorfo a X. Pela observação acima, segue que: se $X \subset \mathbb{R}^m$ pode ser coberto por abertos relativos que são gráficos de aplicações diferenciáveis (de classe C^k) definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}^{n-m}$, então $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade diferenciável (de classe C^k) de dimensão m.

- Seja M o conjunto das matrizes reais de ordem 2×2 e de posto 1. Afirmamos que $M \subset \mathbb{R}^4$ é uma subvariedade de classe C^∞ de dimensão 3. De fato,

$$M = \{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \; : \; a_1a_4 - a_2a_3 = 0 \text{ e } a_i \neq 0 \text{ para algum } i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Assim, para cada $i = 1, 2, 3, 4$, seja $U_i \subset \mathbb{R}^4$ o subconjunto aberto definido por

$$U_i = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \; : \; a_i \neq 0\}.$$

Então,

$$M \cap U_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \; a_1 \neq 0 \text{ e } a_4 = \frac{a_2a_3}{a_1}\},$$

isto é, $M \cap U_1$é o gráfico de uma função de classe C^∞ definida em um aberto de $\mathbb{R}^3$. Analogamente, para cada i, mostra-se que $M \cap U_i$ é o gráfico de uma função de classe C^∞ definida em um aberto de $\mathbb{R}^3$.

Caracterização. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. As condições abaixo listadas são equivalentes.*

1. *$X \subset \mathbb{R}^n$ é uma m-dimensional subvariedade de classe C^k $(k \geq 1)$;*

2. *para cada $x \in X$ existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo x e uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$ $f: U \to \mathbb{R}^{n-m}$ e um valor regular c de f; $X \cap U = f^{-1}(c)$;*

3. *para cada $x \in X$ existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo x, um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$ $f: V \to \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $X \cap U$ é o gráfico de f.*

Em particular, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma m-dimensional subvariedade diferenciável, então $T_xX \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de dimensão m, para todo $x \in X$.

19.

Referências: Curso de Análise Vol 2 (páginas 315-331) e
Análise Real 2 (páginas 132-138) - Elon Lima

20.

Referências: Curso de Análise Vol 2 (páginas 315-331) e
Análise Real 2 (páginas 132-138) - Elon Lima

21.

Denotamos
$$H^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_n, x_n + 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : x_{n+1} \leq 0\}$$
e $\partial H^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Observações.

- Sejam $A, B \subset H^{n+1}$ subconjuntos abertos de H^{n+1} e $f\colon A \to B$ um difeomorfismo de classe C^1. Então, decorre do Teorema da Função Inversa que

$$a \in A \cap \partial H^{n+1} \Leftrightarrow f(a) \in B \cap \partial H^{n+1}.$$

- Sejam $A \subset H^{n+1}$ subconjunto aberto de H^{n+1}, $a \in A \cap \partial H^{n+1}$ e $f\colon A \to \mathbb{R}^p$ um aplicação diferenciável. Então, para quaisquer duas extensões diferenciáveis de f, digamos F_1 e F_2, em abertos de $\mathbb{R}^{n+1}$ contendo a, tem-se que

$$dF_1(a)v = dF_2(a)v \ \forall \ v \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Assim, naturalmente, fica bem definida a aplicação linear $df(x)\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito uma *subvariedade com bordo* (de classe C^k) se para cada $x \in X$ existe um subconjunto aberto de X e contendo x o qual é C^k-difeomorfo a um aberto de H^{m+1}. Nesse caso, dizemos que a *dimensão* de X é $m+1$. Os difeomorfismos de classe C^k de abertos de H^{m+1} sobre abertos de X são chamados *parametrizações locais*. O subconjunto de X formado pelos pontos que são imagens de pontos em ∂H^{m+1} por parametrizações locais é chamado o *bordo* de X e denotado por ∂X.

- Sejam $\phi\colon U_0 \to U$ e $\psi\colon V_0 \to V$ parametrizações locais de X tais que $\phi(u_0) = \psi(v_0)$. Então, pela primeira observação feita acima, tem-se:

$$u_0 \in \partial H^{n+1} \Leftrightarrow v_0 \in \partial H^{n+1}.$$

Proposição. *O bordo ∂X de uma $(m+1)$-dimensional C^k-subvariedade com bordo X de $\mathbb{R}^n$ é uma m-dimensional C^k-subvariedade de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Imediata. □

Observações.

- Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ C^k-difeomorfos. Então, X é uma C^k-subvariedade com bordo de $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, Y é uma C^k-subvariedade com bordo de $\mathbb{R}^m$.

- $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma C^k-subvariedade com bordo de dimensão m se, e somente se, X pode ser coberto por abertos relativos que são m-dimensionais C^k-subvariedades com bordo de $\mathbb{R}^n$.

- Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um subconjunto aberto e seja $f: U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k. Se $a \in \mathbb{R}$ é uma valor regular de f não trivial (isto é, a está na imagem de f), então

$$X = \{u \in U \ : \ f(u) \leq a\}$$

é X é uma $(n+1)$-dimensional C^k-subvariedade com bordo de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujo bordo é $f^{-1}(a)$.

Demonstração. Forma Local das Submersões. □

- Em geral, temos o seguinte resultado.

Proposição. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma $(m+1)$-dimensional C^k-subvariedade e seja $f: M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k. Se $a \in \mathbb{R}$ é uma valor regular de f não trivial (isto é, a está na imagem de f), então*

$$X = \{u \in M \ : \ f(u) \leq a\}$$

é X é uma $(m+1)$-dimensional C^k-subvariedade com bordo de $\mathbb{R}^n$ cujo bordo é $f^{-1}(a)$.

Demonstração. Segue imediatamente do exemplo acima. □

- O hemisfério $\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in S^n \ : x_{n+1} \leq 0)$ é uma $n+1$-dimensional C^∞-subvariedade com bordo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma m-dimensional C^k-subvariedade. Então, $M \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma C^k-subvariedade com bordo; $dim(M \times [0,1]) = m+1$ e $\partial(M \times [0,1]) = M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$.

Demonstração. Seja $f: M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,t) = t^2 - t$. Veja que f é de classe C^k, $0 \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f e

$$M \times [0,1] = \{(x,t) \in M \times [0,1] : f(x,t) \leq 0\}.$$

□

- Embora $[0,1] \subset \mathbb{R}$ seja uma C^1-subvariedade com bordo, temos que $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ não é uma C^1-subvariedade com bordo.

Exercício. Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ uma C^k-subvariedade com bordo e $N \subset \mathbb{R}^n$ uma C^k-subvariedade. Então $M \times N \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ úma uma C^k-subvariedade com bordo e $\partial(M \times N) = \partial M \times N$.

Sobre os espaços tangentes a uma $(m+1)$-dimensional C^k-subvariedade com bordo $M \subset \mathbb{R}^n$, pela nossa definição de conjunto tangente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ em um ponto $x \in X$, teríamos que $T_xM = T_x\partial M$ para todo $x \in \partial M$, contudo aqui trabalharemos com um espaço tangente diferente daquele, a saber:

$$\overline{T_xM} = df(x)[\mathbb{R}^{m+1}]$$

em que $f: U_0 \to U$ parametrização local de de um aberto de M contendo $x \in M$. Obviamente, quando $x \in M - \partial M$, temos que $\overline{T_xM} = T_xM$ e quando $x \in \partial M$, $T_x\partial M$ é um subespaço vetorial de $\overline{T_xM}$ de codimensão 1. O complementar de $T_x\partial M$ em T_xM é dividido em dois semi-espaços abertos, a saber: $v \in T_xM$ é um *vetor que aponta para dentro* *(respectivamente fora) de M* se $v = df(x)w$ com $w \in H^{m+1} - \partial H^{n+1}$ (respectivamente $w \notin H^{n+1}$).

Leitura recomendada: Teoria de orientação de C^k-subvariedades com bordo em $\mathbb{R}^m$ com o objetivo de enteder o seguinte resultado.

Proposição. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma $m+1$-dimensional C^k-subvariedad com bordo. Se M é orientável, então uma orientação de M induz uma orientação em ∂M tal que: para cada $x \in \partial M$, uma base ordenada $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de $T_x\partial M$ é positiva se, e somente se, a base ordenada $\{v_1, \ldots, v_m, v\}$ de T_xM é positiva para todo vetor de T_xM que aponta para fora de M.*

- Differential Forms and Applications, páginas 60-62 - Manfredo do Carmo;

- Curso de Análise Vol 2, páginas 482-487 - Elon Lima.

22.

Dado um espaço vetorial real V, o conjunto das aplicações k-lineares alternadas

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\ vezes} \to \mathbb{R}$$

é denotado por $A^k(V)$.

Exemplo. Sejam $f_1, \ldots, f_k \colon V \to \mathbb{R}$ funcionais lineares. Então, $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k \colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\ vezes} \to \mathbb{R}$ definido por

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} f_1(v_1) & \ldots & f_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ f_k(v_1) & \ldots & f_k(v_k) \end{pmatrix}$$

é um elemento de $A^k(V)$. Em particular, se $dx_1, \ldots, dx_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota a base dual da base canônica $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$, então $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in A^k(\mathbb{R}^n)$ para todo conjunto de índices $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Proposição. *$\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k};\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ é uma base do espaço vetorial $A^k(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Fazer. $\square$

Exercício. Seja V um espaço vetorial real. Dado W espaço vetorial real isomorfo a V, mostre que $A^k(W)$ é isomorfo a $A^k(V)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mostre também que, se a dimensão de V é finita, então $A^k(V) = \{0\}$ para todo k maior do que a dimensão de V.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Uma *k-forma* em U é uma aplicação $\omega \colon U \to A^k(\mathbb{R}^n)$. Quando $\omega(x) = \sum a_I(x) dx_I$ com $a_I \colon U \to \mathbb{R}$ difernciável (de classe C^r), para todo I, dizemos que ω é uma *k-forma diferencial* (de classe C^r). As 0-formas são funções $U \colon \to \mathbb{R}$.

Dadas $\omega = \sum a_I dx_I$ k-forma e $\phi = \sum b_J dx_J$ l-forma em U, o *produto exterior* de ω por ϕ é uma $(k+l)$-forma em U definida por

$$\omega \wedge \phi = \sum a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Exemplo. Sejam $\omega = a dx_1 + b dx_2 + c dx_3$ 1-forma e $\phi = \alpha dx_1 \wedge dx_2 = \beta dx_1 \wedge dx_3$ 2-forma em $\mathbb{R}^3$. Então, $\omega \wedge \phi = (c\alpha - b\beta) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Propriedades. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Sejam ω k-forma, ϕ r-forma e η s-forma em U. Então*

a. $\omega(\phi + \eta) = \omega \wedge \phi + \omega \wedge \eta$ *se* $r = s$*;*

b. $(\omega \wedge \phi) \wedge \eta = \omega \wedge (\phi \wedge \eta)$*;*

c. $(\omega \wedge \phi) = (-1)^{kr}(\phi \wedge \omega)$.

Demonstração. Fazer. □

Como conseqüência da última propriedade supracitada, temos que $\omega \wedge \omega = 0$ sempre que ω for k-forma com k ímpar. Porém, em geral, não podemos afirmar que $\omega \wedge \omega = 0$. De fato, sendo $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ 2-forma em $\mathbb{R}^4$, temos $\omega \wedge \omega = 2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos abertos e seja $f: U \to V$ uma aplicação diferenciável. Para cada k-forma diferencial ω em V, tem-se que $f^*\omega$ definida por

$$(f^*\omega)(x)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(x))(df(x)v_1, \ldots, df(x)v_k)$$

define uma k-forma diferencial em U.

Propriedades. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ subconjuntos abertos e seja $f: U \to V$ uma aplicação diferenciável.*

1. $f^*(\omega + \phi) = f^*\omega + f^*\phi$ *para quaisquer k-formas diferenciais ω e ϕ em V;*

2. $f^*(\omega \wedge \phi) = f^*(\omega) \wedge f^*(\phi)$ *para quaisquer formas ω e ϕ em U;*

3. se $g: V \to \mathbb{R}^p$ é uma aplicação diferenciável, entaão $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Demonstração. Fazer. □

Exemplo. $V = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ e ω 1-forma em V definida por:

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Seja

$$U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ : r > 0 \text{ e } 0 < \theta < 2\pi\}$$

e seja $f: U \to V$ a aplicação suave definida por $f(r, \theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta))$. Nesse caso, $f^*\omega = d\theta$.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto $f: U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

$$df := \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Em geral, se $\omega = \sum a_I dx_I$ é uma k-forma diferencial em U,

$$d\omega := \sum da_I \wedge dx_I.$$

Propriedades. ...

1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;

2. $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge d\phi$;

3. $d(d\omega) = 0$;

4. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

23.

Daqui por diante, salvo comentário enfático em contário, todas as subvariedades diferenciáveis $M \subset \mathbb{R}^n$ são de classe C^∞.

Uma k-forma numa subvariedade $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω tal que para cada $x \in M$, $\omega(x) \in A^k(T_xM)$. Se $\phi\colon U_0 \to U$ é uma parametrização local de M em torno de x_0 ($\phi(u_0) = x_0$). A *representação de ω nas coordenadas dadas por ϕ* é a k-forma diferencial em U_0 dada por $\omega_\phi(u)(v_1, \dots, v_k) = \omega(\phi(u))(d\phi(u)v_1, \dots, d\phi(u)v_k)$. Vale observar que, se $\psi\colon V_0 \to V$ é outra paametrização local de M em torno de x_0 ($\psi(v_0) = x_0$), então $(\psi^{-1} \circ \phi)^* \omega_\psi = \omega_\phi$.

Uma k-forma ω em M é dita uma *k-forma diferencial* (de classe C^r) se dado $x \in M$ existe uma parametrização local de M $\phi\colon U_0 \to U$ em torno de x tal que ω_ϕ é uma k-forma diferencial (de classe C^r) em U_0.

Elemento de Volume. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade orientada. Para todo $x \in M$, T_xM é um orientado e possui um produto interno (induzido pelo produto interno de $\mathbb{R}^n$). Seja $\phi\colon U_0 \subset \mathbb{R}^m \to U$ uma parametrização positiva em M. Para cada $x = \phi(u) \in U$ a base

$$\{d\phi(u)e_1, \dots, d\phi(u)e_m\}$$

define uma orientação positiva de T_xM. Para cada $x \in M$, $\omega(x) =$ elemento de volume de T_xM, define uma m-forma diferencial em M chamada *elemento de volume de M*. Temos,

$$\omega_\phi(u) = \sqrt{g(u)}du_1 \wedge \dots \wedge du_m,$$

em que

$$g(u) = \det(g_{ij}(u)) \text{ e } g_{ij}(u) = < \frac{\partial \phi}{\partial u_i}(u); \quad \frac{\partial \phi}{\partial u_j}(u) > .$$

Exemplo. Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma subvariedade de dimensão n e orientada. Seja $\nu\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ (dif.) campo unitário de vetores normais a M, tal que uma base $\{w_1, \dots, w_n\}$ de T_xM é positiva se, e somente se, a base $\det(\nu(x), w_1, \dots, w_n)$ é positivo. Seja ω a n-forma elemento de volumne de M. Então, para todo $x \in M$ e para quaisquer $w_1, \dots, w_n \in T_xM$,

$$\omega(x) = \det(\nu(x), w_1, \dots, w_n).$$

Desenvolvendo o determinante acima ao longo de sua primeira coluna $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_{n+1}(x))$, obtemos

$$\omega(x) = \sum (-1)^{i+1} \nu_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

Agora, seja $\phi\colon U_0 \to U$ uma parametrização local (positiva) de M. Assim,

$$\omega_\phi(u) = \|\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u) \times \dots \times \frac{\partial \phi}{\partial u_n}(u)\| du_1 \wedge \dots \wedge du_m.$$

Sejam $N \subset \mathbb{R}^n$ e $M \subset \mathbb{R}^m$ subvariedades diferenciáveis e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada k-forma diferencial ω em N, tem-se que $f^*\omega$ definida por

$$(f^*\omega)(x)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(x))(df(x)v_1, \ldots, df(x)v_k)$$

define uma k-forma diferencial em M.

Propriedades. *Sejam $N \subset \mathbb{R}^n$ e $M \subset \mathbb{R}^m$ subvariedades diferenciáveis e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável.*

1. *$f^*(\omega + \phi) = f^*\omega + f^*\phi$ para quaisquer k-formas diferenciais ω e ϕ em N;*
2. *$f^*(\omega \wedge \phi) = f^*(\omega) \wedge f^*(\phi)$ para quaisquer formas ω e ϕ em N;*
3. *se $g\colon N \to \mathbb{R}^p$ é uma aplicação diferenciável, entaão $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.*

Obs. $\omega_\phi = \phi^*\omega$.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade. Dada uma k-forma diferencial (de classe C^1) ω em M definimos a derivada exterior *de ω, denotada por $d\omega$, localmente por:*

$$d\omega = (\phi^{-1})^*(d(\phi^*\omega))$$

em que $\phi\colon U_0 \to U$ é parametrização local de M. Mostremos que a $(k+1)$-forma $d\omega$ está bem definida. Para tanto, seja $\psi\colon V_0 \to V$ outra parametrização local de M tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\phi^{-1})^*(d(\phi^*\omega)) &= (\phi^{-1})^*(d((\psi \circ h)^*\omega)) \\
&= (\phi^{-1})^* h^* d(\psi^*\omega) \\
&= (h \circ \phi^{-1})^* d(\psi^*\omega) \\
&= (\psi^{-1})^*(d(\psi^*\omega)).
\end{aligned}$$

24.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade m-dimensional compacta e orientada. Seja ω uma m-forma contínua em M. Abaixo, relembramos a definição de $\int_M \omega$.

- No caso em que o suporte de ω está contido em um aberto $U \subset M$ positivamente parametrizado , digamos por $\phi\colon U_0 \subset \mathbb{R}^m \to U$, temos

$$\int_m \omega := \int_{U_0} \phi^*\omega.$$

- Em geral, consideramos uma cobertura de M por abertos positivamente orientados, digamos $U_1, \ldots, U_l$. Associada a uma tal cobertura, consideramos uma partição da unidade $f_1, \ldots, f_l\colon M \to [0,1]$ e definimos as m-formas contínuas $\omega_i : f_i\omega$; $i = 1, \ldots, l$. Então,

$$\int_m \omega := \int_m \omega_1 + \cdots + \int_m \omega_l.$$

Propriedades. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade m-dimensional compacta e orientada.*

a. $\int_M c\omega + \int_M \tilde{\omega} = c\int_M \omega + \tilde{\omega}$.

b. Se $\omega \geq 0$, então $\int_M \omega \geq 0$. Nesse caso, $\int_M \omega > 0$ se, e somente se, existe $x \in M$ tal que $\omega(x) > 0$;

c. Sejam η uma m-forma contínua definida na subvariedade orientada $N \subset \mathbb{R}^p$ e seja $f\colon M \to$ um difeomorfismo. Então, $\int_M f^*\eta = \int_M \eta$ se f é positivo e $\int_M f^*\eta = -\int_M \eta$ se f é negativo.

Demonstração. Fazer. □

Teorema de Stokes. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma m-dimensional subvariedade com bordo, compacta e orientada. Se ω é uma $(m-1)$-forma contínua em M, então*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Demonstração. Observando que, se $\omega = \omega_1 + \cdots \omega_l$, então

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega_1 + \cdots \int_{\partial M} \omega_l \text{ e} \int_M d\omega = \int_M d\omega_1 \cdots \int_M d\omega_l,$$

é suficiente considerarmos ω tal que o seu suporte está contido em um aberto $U \subset M$ positivamente orientado, digamos por $\phi \colon U_0 \to U$. Temos

$$\phi^*\omega = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i a_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_m$$

e

$$d(\phi^*\omega) = (\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m.$$

`Caso` $U \cap \partial M = \emptyset$.

Nesse caso, consideremos $R = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_m, \beta_m]$ retângulo contido no interior do semi-espaço H^m e contendo o suporte de $\phi^*\omega$ em seu interior. Estendendo as funções reais $a_1, \ldots, a_m$ para R, da seguinte forma: $a_i(x) = 0$ se $x \notin U_0$, temos:

$$\int_M d\omega = \int_R d(\phi^*\omega).$$

Por outro lado, utilizando integração repetida, temos:

$$\begin{aligned}
\int_R d(\phi^*\omega) &= \sum_{i=1}^{m} \int_R \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_m \\
&= \sum_{i=1}^{m} [\int_{R_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i] dx_1 \ldots \hat{dx_i} \ldots dx_m \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_{R_i} a_i(x_1, \ldots, \beta_i, \ldots, x_m) - a_i(x_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, x_m) dx_1 \ldots \hat{dx_i} \ldots dx_m \\
&= 0.
\end{aligned}$$

em que $R_i = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times \widehat{[\alpha_i, \beta_i]} \times \ldots \times [\alpha_m, \beta_m]$.

`Caso` $U \cap \partial M \neq \emptyset$.

Nesse caso, consideremos $R = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_m, 0]$ retângulo contido no interior (relativo)do semi-espaço H^m e contendo o suporte de $\phi^*\omega$ em seu interior. Por definição, temos

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{R_m} a_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0) dx_1 \ldots dx_{m-1}.$$

Por outro lado, utilizando integral repetida, temos:

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \sum_{i=1}^{m} \int_R \frac{\partial a_i}{\partial} dx_1 \ldots dx_m \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \int_R \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_m + \int_R \frac{\partial a_m}{\partial x_m} dx_1 \ldots dx_m \\
&= \int_{R_m} [\int_{\alpha_m}^{0} \frac{\partial a_m}{\partial x_m} dx_m] dx_1 \ldots dx_{m-1} \\
&= \int_{R_m} a_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0) dx_1 \ldots dx_{m-1}.
\end{aligned}$$

□

Aplicações

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma m-dimensional subvariedade com bordo, compacta e orientável. Então não existe uma aplicação de classe C^2 $f\colon M \to \partial M$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in \partial M$.

Demonstração. Fazer □

Teorema do Ponto Fixo. *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ a bola fechada de centro na origem e raio 1. Toda aplicação contínua $f\colon B \to B$ possui um ponto fixo.*

Demonstração. Fazer □

Como conseqüência imediata do teorema acima, mostra-se que a aplicação antípoda $S^1 \to S^1$ não possui extensão contínua para o disco fechado $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado por S^1, segue-se uma prova de que S^1 não é simplesmente conexo.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $f, g\colon M \times N$. Quando existe uma aplicação contínua $H\colon M \times I \to N$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in M$, dizemos que f é homotópica *a g. Quando, H é de classe C^k, dizemos que f é C^k*-homotópica a g.

Proposição. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade, compacta, orientada. Sejam $f, g\colon M \to N$ aplicações C^2=homotópicas, em que N é uma subvariedade $N \subset \mathbb{R}^p$. Seja ω uma m-forma de classe C^1 e fechada em N, então $\int_M f^*\omega = \int_M g^*\omega$. Em particular, a aplicação identidade $M \to M$ não ú C^2-homotópica a uma aplicação constante $M \to N$.*

Demonstração. Seja $H\colon M \times I \to N$ de classe C^2 tal que $H \circ \alpha(x) = f(x)$ e $H \circ \beta(x) = g(x)$ em que $\alpha\colon M \to M \times \{0\}$ é o difeomorfismo positivo $\alpha(x) = (x, 0)$ e $\beta\colon M \to M \times \{1\}$ é o difeomorfismo negativo $\beta(x) = (x, 1)$. Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\begin{aligned}\int_{\partial(M\times I)H^*\omega} &= \int_{M\times I} d(H^*\omega)\\ &= \int_{M\times I} H^*(d\omega)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{M\times\{0\}} H^*\omega + \int_{M\times\{1\}} H^*\omega = 0.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}\int_M f^*\omega &= \int_M (H\circ\alpha)^*\omega\\ &= \int_M \alpha^*(H^*\omega)\\ &= \int_{M\times\{0\}} H^*\omega \text{ pois } \alpha \text{ é positivo}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_M g^*\omega &= \int_M (H\circ\beta)^*\omega\\ &= \int_M \beta^*(H^*\omega)\\ &= -\int_{M\times\{1\}} H^*\omega \text{ pois } \beta \text{ é negativo}\end{aligned}$$

Assim, fica provada a proposição. □

Poincaré-Brouwer. *Se n é par, então todo campo contínuo de vetores tangentes a S^n possui uma singularidade.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ um número par. Primeiro, provemos que se não existe um campo diferenciável (de classe C^2) de vetores tangentes a S^n e que não possui singularidades. Pro contradição, seja $\eta\colon S^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ campo diferenciável (de classe C^2) de vetores tangentes a S^n e que não possui singularidades. Dividindo $\eta(x)$ por $\|\eta(x)\|$, podemos supor que

$$\eta\colon S^n \to S^n.$$

Via a homotopia de classe C^2 $H\colon S^n \times I \to S^n$ definida por

$$H(x,t) = \frac{t\eta(x) + (1-t)\sigma x}{\|t\eta(x) + (1-t)\sigma x\|}$$

onde $\sigma \in \{-1, 1\}$, temos que $\eta\colon S^n \to S^n$ é C^2-homotópica à aplicação identidade $id\colon S^n \to S^n$ (caso $\sigma = 1$) e $\eta\colon S^n \to S^n$ é C^2-homotópica à aplicação antípoda $\alpha\colon S^n \to S^n$ (caso $\sigma = -1$). Tomando o elemento de volume ω em S^n e usando que α é um difeomorfismo negativo, pois n é par, recebemos:

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{S^n} \omega \\
&= \int_{S^n} (id)^*\omega \\
&= \int_{S^n} \eta^*\omega \\
&= \int_{S^n} \alpha^*\omega \\
&= -\int_{S^n} \omega \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Agora, mostremos que se existisse um campo contínuo de vetores tangentes a S^n sem singularidades, então existiria um campo diferenciável (de classe C^∞)de vetores tangentes a S^n sem singularidades. De fato, suponha que $\nu\colon S^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ seja um campo contínuo de vetores tangentes a S^n sem singularidades. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\|\nu(x)\| > \epsilon$ para todo $x \in S^n$. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe $\xi\colon S^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ de classe C^∞ tal que $\|\xi(x) - \nu(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in \S^n$. Vale observar que não podemos afirmar que ξ é um campo de vetores em S^n. Por outro lado, $\eta\colon S^n \to \mathbb{R}^{m+1}$ definido por $\eta(x) = \xi(x) - < \xi(x), x > x$ é um campor de vetores de classe C^∞ e, se $\eta(x) = 0$, então

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 &> \|\xi(x) - \nu(x)\|^2 \\
&= \|\xi(x)\|^2 + \|\nu(x)\|^2 \\
&> \epsilon^2.
\end{aligned}$$

□