

1. Os três problemas clássicos da Grécia antiga.

Com régua mão-graduada e compasso (e as regras de construções!) é possível:

1. Duplicar um cubo, i.e., construir a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro daquele de um cubo com um segmento dado como aresta (O PROBLEMA DELIANO);
2. Trissectar um ângulo, i.e., dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais; ou
3. Quadrar um círculo, i.e., construir um quadrado tendo a mesma área de um círculo dado?

Estes problemas datam do século V a.C e eles têm uma história longa e interessante (Pesquisa!).

Veremos que nos problemas 1 e 3 uma construção nunca é possível. Com relação ao problema 2, existem ângulos que não podem ser trissectados, como por exemplo um ângulo de 60° . Isto não significa que ainda não se conhece uma construção, que nenhuma construção foi descoberta; significa, sim, que não pode existir solução alguma. É natural querer saber como tal resultado negativo pode ser estabelecido. É isso que faremos logo a seguir.

Observação (... de cunho histórico). É difícil dizer quando o problema 1 foi resolvido. O problema 2 saiu como um caso especial de um resultado mais geral devido a GAUSS (1777-1855) e Wantzel (1814-1848) sobre o problema de encontrar os valores de n para os quais é possível construir um polígono regular com n lados. O problema 3 foi resolvido por Lindemann (1882) e é um pouco mais difícil que os dois primeiros. Muitas "soluções" falsas, para esses problemas, foram apresentadas ao longo do tempo (Pesquisa!).

2. NÚMEROS CONSTRUCTÍVEIS

Problema: Dado um segmento de reta de comprimento 1 no plano, para que valores de a positivo pode-se construir um segmento de comprimento igual a a ?

Inicialmente vejamos que regras regulam as construções, onde por "construções" nos referimos a uma sequência finita de operações com um compasso e uma régua não-graduada. As operações que podem ser efetuadas com esses instrumentos serão chamadas de CONSTRUÇÕES FUNDAMENTAIS, e são as seguintes:

1. Dados dois pontos, podemos desenhar (traçar, obter, existe, etc) uma reta passando por eles e que pode ser estendida indefinidamente em cada direção;
2. Dados dois pontos, podemos desenhar (!) um segmento ligando esses dois pontos;
3. Dado um ponto e um segmento de reta, podemos desenhar uma circunferência com centro no ponto e raio igual ao comprimento do segmento de reta dado.

Observações: Não caia na tentação de querer traçar uma circunferência com centro num ponto dado (ou arbitrário) e raio (arbitrário (ou dado))

Não é uma atividade difícil provar o seguinte lema:

LEMA 1a: | Dados segmentos de comprimentos 1, a e b , é possível construir segmentos de comprimentos $a+b$, $a-b$ ($a > b$), ab e a/b ($b \neq 0$).

Prova: Exercício para o leitor.

DEFINIÇÃO: Um número real a é construtível se, dado inicialmente um segmento de comprimento 1, é possível construir um segmento de comprimento $|a|$.

PROBLEMA 1: Mostre que se a e b são números construtíveis, então também são construtíveis os números $a+b$, $a-b$, ab e a/b ($b \neq 0$).

PROBLEMA 2: (Importante) Mostre que todo número inteiro é construtível e, daí, conclua que todo número racional é construtível.

Neste curso vamos trabalhar com certos conjuntos especiais de números reais os quais chamaremos de CORPOS.

Seja F um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

DEFINIÇÃO: F é um CORPO se ele satisfaz as seguintes condições:

- a) F é fechado sob as operações racionais (adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por 0)), significando que sempre que estas operações são aplicadas a elementos de F , o resultado é um elemento de F ;
- b) O número 1 é um elemento de F .

OBSERVAÇÃO: A condição b) exclui os dois casos triviais $F = \emptyset$ e $F = \{0\}$.

EXERCÍCIO: (a) Mostrar que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são corpos.

(b) Mostrar que o conjunto dos números construtíveis é um corpo.

(c) $\mathbb{Z}$ é um corpo? Porque?

Na procura de alguma descrição dos números que são construtíveis é importante perceber que, para que isto seja possível (usando somente comprimentos em algum corpo F) precisamos saber construir comprimentos (segmentos) que não estão em F . (pelo menos um!). Em particular, isto será o caso sempre que F não é fechado sob a operação de tomar a raiz quadrada de um número positivo, como veremos no seguinte lema.

LEMA 1b: | Dados segmentos de comprimentos 1 e a , pode-se construir um segmento de comprimento $\sqrt{a}$.

Prova: Exercício para o leitor.

Exercício: (Importante) Se todos os números de um corpo F são construtíveis então todos os números da forma $a + b\sqrt{k}$, onde $a, b, k \in F$ e $k > 0$, também são construtíveis. (Sugestão: usar os lemas 1.a e 1.b).

Exercício: (Importante) Se F é um corpo e $k \in F$, $k > 0$, então o conjunto de todos os números da forma $a + b\sqrt{k}$, $a, b \in F$, também forma um corpo. (Sugestão: veja definição de corpo, pg 3)

DEFINIÇÃO: O corpo dos números da forma $a + b\sqrt{k}$, $a, b, k \in F$, $k > 0$ é chamado EXTENSÃO de F por $\sqrt{k}$ e é denotado por $F(\sqrt{k})$.

OBSERVAÇÃO: a) Se $\sqrt{k} \in F$, o conjunto $F(\sqrt{k})$ considerado no exercício acima é o próprio conjunto F . (Mostre isso!)
 b) Se $\sqrt{k} \notin F$ então F é um subconjunto próprio do conjunto $F(\sqrt{k})$. Neste caso $F(\sqrt{k})$ é chamado

UMA EXTENSÃO QUADRÁTICA de F .

Lema 1.c: Se F é um corpo e se $k \in F, k > 0$, então $F(\sqrt{k})$ também é um corpo.

Prova: É a própria solução do exercício anterior.

Sabemos que qualquer número racional é construtível (Probl. 2, pg 3) e que todo número que pode ser calculado a partir de racionais por uma sequência finita de operações racionais e a operação de raiz quadrada é também construtível. (Ex da pg 4). Por exemplo, o número $\sqrt[4]{13} + \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{1+2\sqrt{7}}}$ é construtível, como podemos

constatar examinando a seguinte sequência:

$$7, \sqrt{7}, \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}, 1, 1 + 2\sqrt{7}, \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}, 6, \sqrt{6}, \sqrt{6} + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}, \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}, 13, \sqrt{13}, \sqrt{\sqrt{13}} = \sqrt[4]{13}, \sqrt[4]{13} + \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}.$$

De modo geral, podemos guardar esta informação em termos de corpos no seguinte lema:

Lema 1.d: Um número a é construtível se existe uma sequência finita de corpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N$, com $a \in F_N$, e tal que para cada j , $0 \leq j \leq N-1$, F_{j+1} é uma extensão quadrática de F_j .

Prova: 1. Vamos proceder por indução sobre N .

2. Se $N=0$, $a \in F_0 = \mathbb{Q}$, e daí, a é construtível (Probl. 2, pg 3).

3. Se $a \in F_{k+1}$, então a pode ser expresso na forma $a_p + b_p\sqrt{k_p}$, onde $a_p, b_p, k_p \in F_p$.

Assumamos que o lema seja verdadeiro para $N=k$ e provemos que ele vale para $N=k+1$.

5. Pela hipótese de indução, $a_p, b_p \in k_p$ são construtíveis, e daí, pelos lemas 1.b e 1.a segue que $a = a_p + b_p \sqrt{k_p}$ é construtível.

#

Vamos aplicar o lema 1.d e escrever uma sequência de corpos para o número $\sqrt[4]{13} + \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{1+2\sqrt{7}}}$.

Eis uma sequência...: $F_0 = \mathbb{Q}$, $F_1 = F_0(\sqrt{7})$, $F_2 = F_1(\sqrt{1+2\sqrt{7}})$, $F_3 = F_2(\sqrt{6})$, $F_4 = F_3(\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{1+2\sqrt{7}}})$, $F_5 = F_4(\sqrt[4]{13})$, $F_6 = F_5(\sqrt{13})$, F_6 é o corpo que contém o número dado.

Uma tal sequência é simplesmente obtida seguindo os passos da construção e estendendo o corpo cada vez que uma raiz quadrada que ainda não apareceu no corpo é introduzida. Se estivermos interessados, de fato, em provar que temos uma sequência de corpos do arado como descrito no lema 1.d, i.e., uma sequência de extensões quadráticas, poderemos ter algum trabalho para determinar em que passo um corpo suficientemente grande foi produzido. Por exemplo, podemos mostrar no exemplo acima que $\sqrt{13} \notin F_4$? Para nossos propósitos tais cálculos não serão importantes. Na verdade, existem muitas maneiras diferentes que nos podem levar a construir o número complicado do exemplo acima. Tente construir um como exercício!

(1) Lema 1d. caracteriza uma certa classe de números construtíveis. Uma questão logo se põe: Existem outros números construtíveis além daqueles do Lema? A resposta é um sonoro NÃO; e para podermos ver isso vamos necessitar de lançar mão de alguns resultados elementares da geometria analítica.

3. Geometria Analítica em F .

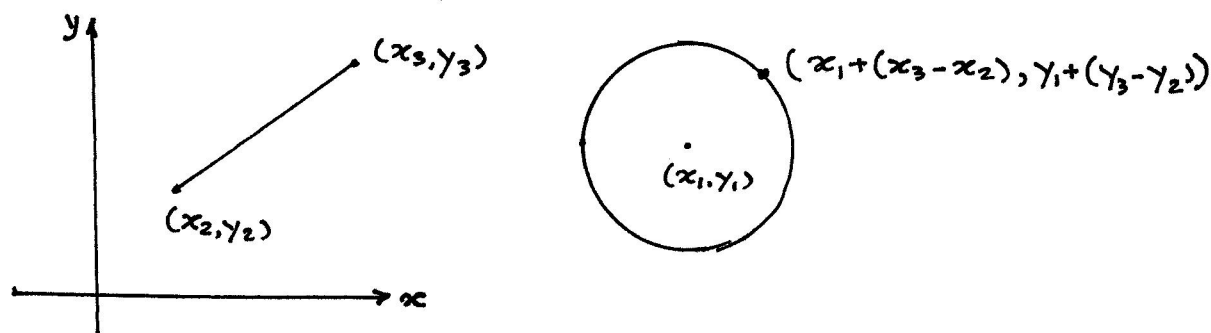
Seja F um corpo.

O conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano tais que $x, y \in F$ chamaremos PLANO de F .

Uma RETA em F é uma reta que passa por dois pontos de F .

Uma circunferência (ou círculo) em F é uma circunferência em que o seu centro e um de seus pontos está no plano de F .

A importância destas noções vem do fato que qualquer construção fundamental usando somente pontos do plano de F envolve as construções de retas e circunferências em F . Para as duas primeiras construções fundamentais isto é óbvio pela definição de reta em F . Para a terceira construção fundamental, aquela de um círculo com um centro dado e raio igual a um segmento dado conectando dois pontos dados, suponhamos que o centro é (x_1, y_1) e o segmento é aquele ligando os pontos (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , onde $x_i \in F, y_i \in F, i=1, 2, 3$.



É fácil ver que a circunferência desenhada está no plano de F , pois seu centro está no plano de F e ela passa pelo ponto $(x_1 + (x_3 - x_2), y_1 + (y_3 - y_2))$ que também está no plano de F .

O lema seguinte é básico.

Lema 1.e: | Toda reta em F pode ser representada por uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde $a, b, c \in F$.
Toda circunferência em F pode ser representada por

uma equação da forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = d$, onde $a, b, c, d \in F$.

Prova: Exercício para o leitor.

Uma vez que a única maneira para construir um segmento é construindo suas extremidades, e desde que o único modo de construir um ponto é como interseção de duas retas, uma reta e uma circunferência ou de duas circunferências, é importante determinar a natureza de tais interseções. Em particular temos o seguinte lema:

Lema 1f: O ponto de interseção de duas retas em F está no plano de F .
Os pontos de interseção de uma reta em F e uma circunferência em F , bem como os pontos de interseção de duas circunferências em F estão ou no plano de F ou no plano de alguma extensão quadrática de F .

Prova: Exercício para o leitor.

Observação: Note que o plano de F está contido no plano de qualquer extensão quadrática de F ; assim as palavras "ou no plano de F ou" podem ser omitidas do enunciado do lema 1f. sem mudar o significado do lema. No entanto, é mais conveniente pensar sobre isto na forma dada no lema.

Estamos agora em condições de provar o principal teorema sobre construtibilidade e que dará resposta ao problema proposto na página 2 deste texto.

TEOREMA FUNDAMENTAL: As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O número a é construtível.
- (ii) Existe uma sequência finita de corpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N$, com $a \in F_N$, e tal que para cada j , $0 \leq j \leq N-1$, F_{j+1} é uma extensão quadrática de F_j .

Prova: Que (ii) implica (i) é simplesmente o lema 1d.

Mostremos que (i) implica (ii).

1. Seja a um número construtível (hipótese).
2. Se dermos os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ no plano cartesiano então, por hipótese, um segmento de comprimento $|a|$ pode ser construído.
3. Podemos usar o segmento de 2., o ponto $(0,0)$ e a reta que passa por $(0,0)$ e $(1,0)$ para construir o ponto $(a,0)$; chamaremos esse ponto de P .
4. É suficiente mostrar que P está no plano de um corpo F_N do tipo descrito em (ii), i.e., um corpo obtido a partir de $\mathbb{Q}$ por uma sequência de extensões quadráticas.
5. A construção de P envolve um número finito de construções fundamentais, cada uma das quais resulta num número finito de novos pontos como interseções de vários tipos. Listamos todos esses pontos em ordem de construção, onde pontos resultantes de um mesmo passo podem ser listados em qualquer ordem.
6. O ponto P está nesta lista, digamos na m -ésima posição.

7. Omitindo alguns pontos na lista depois de P (que podem somente incluir pontos construídos no mesmo passo em que P foi construído) temos: $P_1, P_2, \dots, P_{m-1}, P_m$ ($P_m = P$).
8. O Teorema estará provado se estabelecermos a veracidade da seguinte afirmação: Existe um corpo F , obtido a partir de $\mathbb{Q}$ por uma sequência de extensões quadráticas, tal que $P_1, P_2, \dots, P_m$ estão todos no plano de F .
Vamos proceder por indução sobre m .
9. Uma vez que P_1, P_2 devem ser os dois pontos $(0,0)$ e $(1,0)$, que estão no plano de $\mathbb{Q}$, a afirmação é válida para $m=1$ e $m=2$.
10. Para mostrar que a afirmação é válida para qualquer m , recordamos que a construção de P_m somente envolve figuras construídas usando (algum subconjunto dos) pontos P_1 até P_{m-1} , e daí, pela hipótese de indução, figuras no plano de algum corpo $\tilde{F}$ obtido a partir de $\mathbb{Q}$ por uma sequência finita de extensões quadráticas.
11. Pelo Lema 1f, P_m está no plano de $\tilde{F}$ ou de $\tilde{F}(\sqrt{k})$, para algum $k \in \tilde{F}$ com $\sqrt{k} \notin \tilde{F}$.
12. Em ambos os casos P_m , bem como os anteriores P_i 's, estão todos no plano de um corpo do tipo requerido.

#.

Observação (importante): O teorema fundamental estabelece a equivalência entre duas propriedades: uma de cunho geométrico (i) e uma de cunho algébrico (ii). É através da conversão do problema geométrico em um problema algébrico equivalente, mediante este Teorema, que obtemos a "chave"

para solucionarmos os três problemas clássicos da página 1.

4. ALGUNS TEOREMAS ALGÉBRICOS E UM POUCO DE TRIGONOMETRIA.

TEOREMA 1:

Se a equação $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ tem coeficientes inteiros e tem raiz racional p/q , onde p e q são inteiros com $\text{mdc}(p, q) = 1$, então p divide a_0 e q divide a_n .

Prova: 1. Substituindo p/q no lugar de x na equação e multiplicando ambos os membros por q^n obtemos:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

$$2. \text{ Assim, } a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n;$$

$$\text{logo, } p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

Daqui segue que p divide $a_0 q^n$.

$$3. \text{ Como } \text{mdc}(p, q) = 1 \text{ temos que } p \text{ divide } a_0. \quad (!)$$

4. De modo análogo, uma vez que

$$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})$$

e $\text{mdc}(p, q) = 1$, segue que q divide a_n .

#

TEOREMA 2:

Se uma equação cúbica com coeficientes racionais não tem raiz racional, então nenhuma de suas raízes é um número construtível.

Prova: 1. Suponhamos que $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e que a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ não tenha raiz racional mas tenha uma raiz que é um número construtível.

2. Seja $F_0 = \mathbb{Q}$.

3. Existe um menor inteiro positivo k tal que a cúbica tenha uma raiz construtível r numa extensão quadrática F_k , com

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{k-1} \subset F_k$$

onde $F_{i+1} = F_i(\sqrt{d_{i+1}})$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, $d_i \in F_i$.

4. Por hipótese existem $p, q \in F_{k-1}$ tais que $r = p + q\sqrt{d_k}$.

5. Devemos ter $q \neq 0$ pois, caso contrário $r \in F_{k-1}$, e daí k não seria o menor inteiro como foi dito acima.

6. Da identidade algébrica

$$(p \pm q\sqrt{d_k})^3 + a(p \pm q\sqrt{d_k})^2 + b(p \pm q\sqrt{d_k}) + c =$$

$$(p^3 + 3pq^2d_k + ap^2 + aq^2d_k + bp + c) \pm$$

$(3p^2q + q^3d_k + 2apq + bq)\sqrt{d_k}$, vemos que $p - d\sqrt{d_k}$ também deve ser raiz da equação cúbica se $p + q\sqrt{d_k}$ o for.

7. As raízes $p + q\sqrt{d_k}$ e $p - q\sqrt{d_k}$ são distintas uma vez que $q \neq 0$.

8. Seja t a terceira raiz da equação cúbica. Então

$$x^3 + ax^2 + bx + c =$$

$$(x-t)(x-(p+q\sqrt{d_k}))(x-(p-q\sqrt{d_k})) =$$

$$(x-t)(x^2 - 2px + p^2 - q^2d_k) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

9. Comparando os coeficientes de x^2 em ambos os membros, devemos ter $a = -t - 2p$.

Daí $t = -a - 2p$; logo $t \in F_{k-1}$. Isto é uma contradição devido a minimalidade de k , uma vez que t é uma raiz da cúbica e pertence a F_{k-1} .

10. Assim, nossa suposição em 1. é falsa. Logo, vale o Teorema.

#

Recordemos agora algumas fórmulas da trigonometria, que nos serão úteis na resolução do problema da trisseção de um ângulo.

Sabemos que $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Como consequência segue que

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)$$

$$= (\sin \alpha) [4 \cos^2 \alpha - 1]$$

$$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$$

$$= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Multiplicando a última relação por 2 e rearranjando os termos, temos a identidade

$$(2\cos\alpha)^3 - 3(2\cos\alpha) - 2\cos 3\alpha = 0$$

Agora, uma vez que

$\cos[3(\alpha+120^\circ)] = \cos[3(\alpha+240^\circ)] = \cos(3\alpha)$, temos o seguinte lema:

LEMA 1: | A equação $x^3 - 3x - 2\cos(3\alpha) = 0$ tem
raízes $2\cos\alpha$, $2\cos[\alpha+120^\circ]$ e $2\cos[\alpha+240^\circ]$.

Prova: Exercício para o leitor.

Um outro lema importante é o seguinte:

LEMA 2: | Existem pontos construtíveis P, Q e R tais que
 $\hat{PQR} = t^\circ$ se e somente se $\cos t^\circ$ é um
número construtível.

Prova: Exercício para o leitor.

5. TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO.

Vamos tecer comentários que nos levarão à estabelecer a impossibilidade de trissectar ângulo usando régua não graduada e compasso.

Assim... sabemos que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; tomando no lema 1 $3\alpha = 60^\circ$, vemos que a equação $x^3 - 3x - 2\cos 60^\circ = 0$, i.e., $x^3 - 3x - 1 = 0$ tem raízes iguais a $2\cos 20^\circ$, $2\cos 140^\circ$ e $2\cos 260^\circ$. Pelo Teorema 1 esta equação tem

raízes não racionais (!), e, portanto, nenhuma destas raízes é um número construtível, pelo Teorema 2. Em particular, acabamos de estabelecer o seguinte teorema importante:

TEOREMA 3: | O número $\cos 20^\circ$ não é construtível.

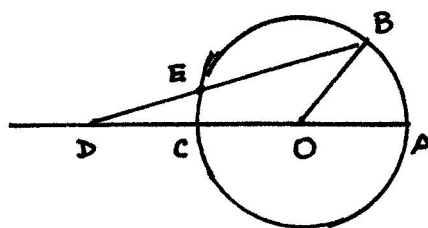
Pelo Lema 2 o Teorema acima nos diz que um ângulo de 60° não pode ser trissectado com régua não-graduada e compasso. Assim obtivemos um ângulo que não pode ser trissectado; no entanto é fácil construir ângulos que podem ser trissectados, e daí uma infinidade deles. O que acabamos de fazer foi mostrar a existência de um ângulo (o de 60°) que não pode ser trissectado. Isto daí por estabelecido que O FAMOSO PROBLEMA DA TRISSECCÃO NÃO TEM SOLUÇÃO (repetido, com régua não-graduada e compasso). Assim, o chamado PROBLEMA DA TRISSECCÃO DO ÂNGULO é insolúvel.

EXERCÍCIOS:

1. Usando um sistema de coordenadas
 - (a) construa $\cos A$ dado um ângulo agudo A .
 - (b) idem a (a) mas com A obtuso.
 - (c) construa A sendo dado um segmento cujo comprimento é $\cos A$.
2. Um método interessante para trissectar ângulo que é atribuído a Arquimedes.
 1. Seja dado um ângulo $\hat{A}OB$.

2. Trace a circunferência com centro em O e raio OA .

3. Trace o segmento BD de modo que DE seja congruente a OA .



4. Afirmar: (Prove que) $\hat{CDE} = \frac{1}{3} \hat{AOB}$.

6. DUPLICAÇÃO DO CUBO

Relembramos o clássico problema da "duplicação do cubo":

- Construir a aresta de um cubo cujo volume será o dobro do volume de um cubo com um segmento dado como aresta.

Se tomarmos como nosso segmento unitário o segmento dado, o problema da duplicação do cubo se reduz a construção de um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$. (Mostre isto!).

Pelo Teorema Fundamental (pg 9) se $\sqrt[3]{2}$ for construtível, deveremos ter associado a ele uma sequência de extensões quadráticas de corpos. O lema seguinte é básico para estabelecer esta possibilidade.

LEMA 3: $\left| \begin{array}{l} \text{Seja } F(\sqrt{k}) \text{ uma extensão quadrática de um corpo } F. \\ \text{Se } \sqrt[3]{2} \in F(\sqrt{k}) \text{ então } \sqrt[3]{2} \in F. \end{array} \right.$

Prova: 1. $\sqrt[3]{2} \in F(\sqrt{k})$ (Hipótese).

2. $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{k}$, $a, b, k \in F$, $\sqrt{k} \notin F$.

3. Queremos mostrar que $b=0$ (!).

4. De 2. temos: $2 = (a + b\sqrt{k})^3$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 + 3a^2b\sqrt{k} + 3ab^2k + b^3k\sqrt{k} \\
 &= (a^3 + 3ab^2k) + (3a^2b + b^3k)\sqrt{k}
 \end{aligned}$$

5. Devemos ter $3a^2b + b^3k = 0$ pois, caso contrário

$$\sqrt{k} = \frac{2 - (a^3 + 3ab^2k)}{3a^2b + b^3k} \in F. \quad (\text{Veja 2.})$$

6. Temos então

$$(a - b\sqrt{k})^3 =$$

$$(a^3 + 3ab^2k) - (3a^2b + b^3k)\sqrt{k} = 2,$$

o que nos dá outra raiz cúbica de 2, a saber $a - b\sqrt{k}$.

7. Uma vez que a função $y = x^3$ é estritamente crescente, não existe mais do que uma raiz cúbica de 2.

8. Isto requer que $b = 0$.

#

Estemos agora em condições de provar nosso principal teorema deste item.

TEOREMA 4: $\left| \right.$ É impossível duplicar o cubo.

Prova: 1. Duplicar o cubo é equivalente a construir o número $\sqrt[3]{2}$.

2. Se $\sqrt[3]{2}$ é construtível, pelo Teorema Fundamental, existe sequência de corpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$, cada um extensão quadrática do anterior tal que $\sqrt[3]{2} \in F_n$.

3. Aplicações repetidas do Lema 2 implica que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$,

o que contradiz a irracionalidade de $\sqrt[3]{2}$. (Veja exercício abaixo).

#

Observação: Uma outra abordagem do mesmo problema pode ser feita utilizando-se os teoremas do parágrafo 4. De fato, $\sqrt[3]{2}$ é raiz da equação algébrica $x^3 - 2 = 0$. Pelo Teorema 1 (parágrafo 4) esta equação não tem raízes racionais, e pelo Teorema 2 nenhuma de suas raízes é um número construtível. Logo, $\sqrt[3]{2}$ não é construtível.

Do que vimos até agora segue que o problema de DUPLICAÇÃO DO CUBO é insolúvel.

- Exercícios:
1. Mostre que $\sqrt[3]{2}$ é um número irracional.
 2. Um cubo pode ser "triplicável"?
 3. Um cubo pode ser "quaduplicável"?
 4. Generalize os exercícios 3 e 4!

7. QUADRATURA DO CÍRCULO

O terceiro problema clássico da Grécia Antiga, aquele da quadratura do círculo, é bem mais difícil do que os dois primeiros. Lembrando, a questão é: Dado um círculo, é possível construir um quadrado com a mesma área do círculo?

Se tomarmos como comprimento unitário o raio do círculo, sua área é π e, daí, o quadrado apregoado deve ser tal que seu lado deve medir $\sqrt{\pi}$ (!), o que nos leva à necessidade de

constribuibilidade de π . No entanto, mostaremos que π não é construtível, o que acarretará a impossibilidade de se poder quadrar o círculo.

A prova de que π não é construtível consiste de duas partes principais:

1. todo número construtível é raiz de alguma equação polinomial com coeficientes racionais;
2. π não pode ser uma raiz de alguma equação polinomial com coeficientes racionais.

Uma vez que a parte 1 é relativamente simples, será tratada a seguir; a segunda, por ser mais difícil (necessita de outros conceitos como o de função simétrica, por exemplo), mas se será tratada neste curso introdutório.

Para estabelecermos a primeira parte necessitamos do seguinte Lema:

Lema 4: | Seja $F(\sqrt{k})$ uma extensão quadrática de um corpo F . Se α é uma raiz de uma equação polinomial de grau n com coeficientes em $F(\sqrt{k})$, então α é uma raiz de uma equação polinomial de grau $2n$ com coeficientes em F .

Prova: 1. (Hipótese) α é uma raiz de uma equação da forma

$$(a_n + b_n \sqrt{k})x^n + (a_{n-1} + b_{n-1} \sqrt{k})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0 \sqrt{k}) = 0,$$

onde, para todo i , $a_i, b_i \in F$ e, além disso, a_n e b_n não são ambos nulos.

$$2. a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = -\sqrt{k} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) \quad (!)$$

3. Quadrando ambos os membros da igualdade acima

e coletando todos os termos à esquerda obtemos uma equação polinomial para a qual a é também uma raiz. O grau dessa equação é $2n$ pois o coeficiente de x^{2n} , o termo de maior grau, é $a_n^2 - kb_n^2$ e que é distinta de zero, uma vez que $\sqrt{k} \notin F$.

#

Usando este Lema vamos provar o seguinte teorema:

TEOREMA 4: | Todo número construtível é raiz de alguma equação polinomial com coeficientes racionais.

Prova: 1. Seja a um número construtível.

2. Pelo Teorema Fundamental, existe uma sequência de corpos $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N$ tal que $a \in F_N$ e, para cada j , $0 \leq j \leq N-1$, F_{j+1} é uma extensão quadrática de F_j .
3. a satisfaz uma equação polinomial de grau 1 com coeficientes em F_N , a saber: $x - a = 0$.
4. Aplicando repetidas vezes o Lema 4, a satisfaz uma equação polinomial de grau 2^i com coeficientes em F_{N-i} . Daí, para $i = N$ vemos que a satisfaz uma equação polinomial de grau 2^N com coeficientes em $\mathbb{Q}$.

#

Afirmação:

| π é um número transcendental, i.e.,
 π não é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros.

A justificativa desta afirmação o leitor encontra no excelente livro do prof. Djairo G. de Figueiredo, "Números irracionais e transcendentais" publicado pela S.B.M e à venda com o prof. Brambilla.

CONCLUSÃO: Desde que equações polinômiais com coeficientes inteiros e, em particular, uma equação polinomial com coeficientes racionais, segue do Teorema 4 e da afirmação acima o seguinte teorema:

TEOREMA 5: | É impossível a quadratura do círculo.

- EXERCÍCIOS:
1. Construir um quadrado com área igual a área de um triângulo dado.
 2. Construir um quadrado com área igual a área de um paralelogramo dado.
 3. Construir um quadrado com área igual a área de um quadrilátero dado.
 4. Construir um quadrado com área igual a área de um polígono convexo dado. E de um polígono não convexo dado?
 5. Faça uma pesquisa sobre as chamadas "Líneas de Hipócrates" e diga que relação elas têm com o problema da quadratura do círculo.
 6. Utilizando-se de polígonos regulares inscritos e circunscritos em um círculo, Arquimedes

(considerado o maior matemático dentre os antigos!) conseguiu mostrar que $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{11}$ (um resultado que tem sabor de coisa moderna!). Arquimedes usou polígonos com 96 lados (acredite!). No século XVI, Ludolph van Ceulen avaliou π com 17 algarismos (!). Em 1621, Snell calculou o valor de π com 35 algarismos, mas usou polígonos regulares com 2^{30} lados (!)

(a) Procure justificar a aproximação para π obtida por Arquimedes.

(b) Pesquise a respeito do número π e veja (se conseguir) com quantos algarismos se conseguiu até hoje uma aproximação para ele.

(c) Porque mas se conseguiu, até agora, o valor decimal exato para π ? Justifique sua resposta.

7. Faça uma pesquisa a respeito do número π sob o ponto de vista da análise (ou cálculo). U que homens como Newton, Fermat, Wallis e Euler falaram a respeito desse assunto? (Veja, por exemplo, os livros: "History of Mathematics" de D.E. Smith; "História de Matemática" de Boyer e de Eves. Estes livros existem nas bibliotecas de UFSC).

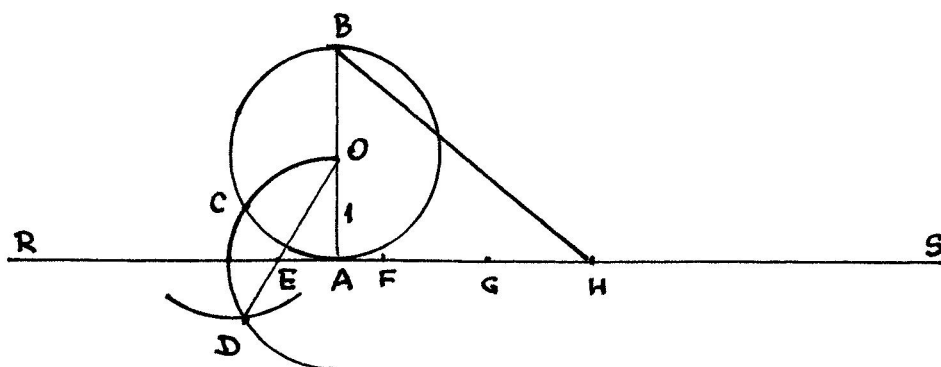
8. Uma "construção para a quadratura do círculo" dada pelo matemático jesuíta (1650) Adam Kochansky.

1. Construa um círculo de raio unitário tangente a uma reta RS em A (vide figuras a seguir).

2. Seja O o centro do círculo.

3. Mantenha o compasso fixo (abertura OA) durante toda a construção.

4. Com centro em A trace um arco cortando o círculo no ponto C.
5. Com C como centro desenhe um arco que intersecta o arco anterior (de 4) em D.
6. Trace OD intersectando RS em E.
7. Construa $\overline{EH}$ igual a 3 unidades (i.e., $EF = FG = GH = 1$).
8. Assim, $\overline{BH} = \pi$ (aproximadamente!).



- (a) Prove que $\overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$.
- (b) Avalie $\overline{BH}$ aproximando o radical em (a) com 5 decimais e compare seu resultado com o valor de π com 5 decimais (3,14159)!
-
7. (só curiosidade...) Mostre que $\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$ é uma raiz de uma equação de grau 4 com coeficientes inteiros. Use o Teorema 4 para mostrar que este valor não pode ser π .
8. Uma leitura recomendável sobre números transcendentais está nos livros: (a) "Números racionais e irracionais" de IVAN NIVEN, publicado pela SBM (1984). (b) "Números irracionais e transcendentais" de Jairo G. de Figueiredo, publicado pela SBM (1985). (Estes livros podem ser adquiridos com o prof. Brambilla).
-